FOR THE PEOPLE
FOR EDVCATION
FOR SCIENCE

LIBRARY
OF
THE AMERICAN MUSEUM
OF
NATURAL HISTORY

COMMENTARII ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS *PETROPOLITANAE.*

Tomus XI.

AD ANNVM MDCCXXXIX.



PETROPOLI.
TYPIS ACADEMIAE.
cIↄ Iↄ ccL.

16.70261 april 28

INDEX
COMMENTARIORVM

In Claſſe Mathematica.

L. Euleri, De productis ex infinitis factoribus ortis. p. 3.
Eiusd. De fractionibus continuis obſeruationes. p. 32.
Eiusd. Determinatio caloris et frigoris graduum pro ſingulis terrae locis ac temporibus. p. 82.
Dan. Bernoulli, De motibus oſcillatoriis corporum humido inſidentium. p. 100.
L. Euleri, Conſideratio progreſſionis cuiusdam ad circuli quadraturam inueniendam idoneae. p. 116.
Eiusd. De nouo genere oſcillationum. p. 128.
Eiusd. Explicatio phaenomenorum, quae a motu lucis ſucceſſiuo oriuntur. p. 150.
Eiusd. Methodus facilis computandi angulorum ſinus ac tangentes, tam naturales, quam artificiales. p. 194.

In Claſſe Phyſica.

G. W. Krafftii, De vi venae aqueae contra planum incurrentis experimenta. p. 233.
Eiusd. Obſeruationes Meteorologicae 1738. inſtitutae. p. 241.
Eiusd. Obſeruationes Meteorologicae anni 1739. p. 254.
Eiusd. Schediaſma de ventorum obſeruatione quotidiana, per integrum ampliſſimum imperium Ruſſicum, inſtituenda, cum maximo ſcientiae meteorologicae emolumento. p. 262.

G. W.

G. W. Krafftii, Diſſertatio de machinis ſimplicibus. p. 274.
Eiusd. Specimen emendatioris theoriae ordinum architectonicorum, p. 288.
I. Ammani, De fungo inſolitae magnitudinis obſeruatio. p. 304.
Eiusd. Deſcriptio et Icon nouae Bermudianae ſpeciei. p. 305.

In Claſſe Hiſtorica.

T. S. Bayeri, De Veſtritio Spurinna Lyrico et eius fragmentis. p. 311.
Eiusd. De Hyperboreis p. 330.

Obſerv. Aſtronom.

Obſeruationes Aſtronomicae in ſpecula Acad. Imperialis Scientiarum ab anno 1739—1745. a *I. N. Deliſlio* et ſociis inſtitutae p. 349.
G. Heinſii, Obſeruatio occultationis Palilicii a Luna d. $\frac{21\ Sept.}{2\ Oct.}$ 1738. Petropoli habita p. 363.
Eiusd. Obſeruatio tranſitus lunae ad Palilicium d. $\frac{4}{15}$ Mart. 1739. Petropoli habita p. 374.

CLASSIS PRIMA

CONTINENS

MATHEMATICA.

DE PRODVCTIS
EX INFINITIS FACTORIBVS ORTIS.
AVCTORE
L. Eulero.

§. 1.

Cum in Analyſi ad eiusmodi quantitates peruenitur, quae numeris nec rationalibus nec irrationalibus exponi poſſunt, expreſſiones infinitae ad eas quantitates denotandas adhiberi ſolent: quae eo magis idoneae ſunt cenſendae, quo citius earum ope ad cognitionem et aeſtimationem quantitatum iis expreſſarum peruenitur. Huiusmodi igitur expreſſionum maximus et ampliſſimus eſt vſus ad valores quantitatum transcendentium, cuiusmodi ſunt logarithmi, arcus circulares, aliaeque per quadraturas curuarum determinatae quantitates, repreſentandos earumque beneficio ad tam exactam cum logarithmorum, tum arcuum circularium, tum etiam plurium aliarum quantitatum transcendentium cognitionem pertigimus. Quin etiam iſtiusmodi expreſſiones infinitae inſignem afferunt vtilitatem ad quantitates irrationales, et radices aequationum algebraicarum per numeros rationales vero proxime definiendas; quae ſi vſus ſpectetur veris expreſſionibus plerumque longe ſunt anteferendae.

§. 2. Huiusmodi autem expreſſionum infinitarum nonnulla genera inter ſe maxime diuerſa ſunt conſtituenda, quorum primum in ſe complectitur omnes ſeries infinitas, in-

finitis terminis ſignis + vel − iunctis conſtantes, quae doctrina nunc quidem iam tantopere eſt exculta, vt non ſolum plures habeantur methodi quasvis quantitates tam algebraicas quam tranſcendentes huiusmodi ſeriebus infinitis exprimendi, ſed etiam propoſita ſerie infinita inueſtigandi, cuiusmodi quantitas ea indicetur. Duplici enim modo expreſſiones infinitas cuiusque generis tractari oportet, quorum alter in conuerſione quantitatum vel algebraicarum vel tranſcendentium in expreſſiones infinitas conſiſtit; alter vero in indagatione illius quantitatis, quam propoſita exppreſſio infinita deſignat, viciſſim verſatur.

§. 3. Ad alterum genus expreſſionum infinitarum referri conuenit eas, quae ex innumerabilibus factoribus conſtant, cuiusmodi expreſſiones, quamquam iam complures ſunt inuentae ac cognitae, tamen nec modus ad eas perueniendi, nec via earum valores dignoſcendi vsquam eſt expoſita. Aeque autem dignae huius generis expreſſiones infinitae videntur, quae excolantur, ac priores ex infinito terminorum numero conſtantes, neque forte minus commodi Analyſi afferetur earum pertractatione. Praeterquam enim, quod iſtiusmodi expreſſiones naturam quantitatum quas referunt ſatis diſtincte ob oculos ponant, et ſaepe numero ad valores proximos inueniendos perquam ſunt accommodatae, inſignem praeſtant vſum ad logarithmos ipſarum quantitatum formandos, id quod in calculo ſaepiſſime ſummam affert vtilitatem. Sic ſi quantitas quaecunquae X transformata fuerit in iſtiusmodi expreſſionem $\frac{a}{\alpha}\cdot\frac{b}{\beta}\cdot\frac{c}{\gamma}\cdot\frac{d}{\delta}\cdot\frac{e}{\varepsilon}\cdot$ etc. ſtatim habebitur logarithmus quantitatis $X = l\frac{a}{\alpha} + l\frac{b}{\beta} + l\frac{c}{\gamma} + l\frac{d}{\delta} +$ etc. quae ſeries eo magis con-

vergit

vergit, quo propius factores illi ad vnitatem inclinant. Hanc ob cauſam conſtitui in hac diſſertatione theoriam huiusmodi expreſſionum infinitarum, quantum quidem obſeruationes meae ſubſidii ſuppeditauerunt, inchoare, quo aliis facilius ſit eam aliquando magis perficere.

§ 4. Primus eiusmodi expreſſionem infinitis factoribus contentam protulit Walliſius in Arithmetica infinitorum, vbi oſtendit, ſi circuli diameter ſit $= 1$. fore aream circuli $\frac{2.\,4.\,4.\,6.\,6.\,8.\,8.\,10.\,10.\,12.}{3.\,3.\,5.\,5.\,7.\,7.\,9.\,9.\,11.\,11.}$ etc. quam expreſſionem deduxit ex interpolatione ſeriei $\frac{2}{3} + \frac{2.\,4}{3.\,5} + \frac{2.\,4.\,6}{3.\,5.\,7} +$ etc. cuius terminos intermidios demonſtrauerat a circuli quadratura pendere. Cum igitur iſtae expreſſiones interpolationi ſerierum originem ſuam debeant, non in congruum fore viſum eſt tractationem hanc de productis ex infinitis factoribus conſtantibus ab interpolationibus incipere. Cum enim in Tomo quinto Commentariorum noſtrorum methodum tradidiſſem interpolationes per quadraturas curuarum perficiendi, ſimul conſtabit, cuiusmodi quantitatem tranſcendentem producta infinita hac ratione orta exhibeant.

§. 5. Conſidero igitur ſequentem progreſſionem

$$\overset{1}{f+g)} + \overset{2}{(f+g)(f+2g)} + \overset{3}{(f+g)(f+2g)(f+3g)} + \overset{4}{(f+g)(f+2g)(f+3g)\ (f+4g)}$$

cuius quilibet terminus, cuius index eſt n, inuenitur ex praecedente hunc per $f+ng$ multiplicando: oſtendi autem in diſſertatione allegata huius ſeriei terminum, cuius index eſt n eſſe $= \frac{g^{n+1} \int dx(-lx)^n}{(f+(n+1)g) \int x^{f:g}\, dx(1-x)^n}$ vtraque integratione ita peracta, vt integralia euaneſcant poſito $x = 0$, tumque facto $x = 1$. Quamobrem iſta expreſſio ſimul indicabit, a quanam quadratura ſinguli ter-

mini intermedii pendeant. Quanquam enim ſi n ſit numerus fractus, non ita facile conſtat, qualem quadraturam $\int dx(-lx)^n$ contineat, tamen eodem loco oſtendi poſito $\frac{p}{q}$ loco n formulam $\int dx\,(-lx)^{\frac{p}{q}}$ congruere cum

$$\sqrt[q]{(1.2.3.\ldots\ldots p)}.\left(\tfrac{2p}{q}+1\right)\left(\tfrac{3p}{q}+1\right)\left(\tfrac{4p}{q}+1\right).\ \ldots.\left(\tfrac{qp}{q}+1\right)$$

$$\int dx(x-xx)^{\frac{p}{q}}\int dx(x^2-x^3)^{\frac{p}{q}}.\int dx(x^3-x^4)^{\frac{p}{q}}.\int dx(x^4-x^5)^{\frac{p}{q}}\ldots\ldots\int dx(x^{q-1}-x^q)^{\frac{p}{q}}$$

cuius reductionis ope valor ipſius $\int dx(-lx)^{\frac{p}{q}}$ per quadraturas curuarum algebraicarum exprimi poteſt.

§ 6. Si nunc in ſerie aſſumta terminus, cujus index eſt $=\frac{1}{2}$, ponatur z, ex lege ſeriei termini, quorum indices ſunt $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{2}$, etc. ſequenti modo ſe habebunt:

$$\overset{\frac{1}{2}}{z}+\overset{\frac{3}{2}}{z(f+\tfrac{3}{2}g)}+\overset{\frac{5}{2}}{z(f+\tfrac{3}{2}g)(f+\tfrac{5}{2}g)}+\overset{\frac{7}{2}}{z(f+\tfrac{3}{2}g)(f+\tfrac{5}{2}g)(f+\tfrac{7}{2}g)}\ \text{etc.}$$

Quoniam autem progreſſio aſſumta tandem cum Geometrica confunnditur, hi termini interpolati euadent tandem medii proportionales inter contiguos ſeriei terminos. Quare ſi ſinguli termini interpolati iam ab initio tanquam medii proportionales ſpectentur, ſequentes prodibunt approximationes ad terminum z, cuius index eſt $\frac{1}{2}$.

$$\text{I. } z=\sqrt{(f+g)}$$

$$\text{II. } z=\sqrt{\frac{(f+g)(f+g)(f+2g)}{1\,(f+\frac{3}{2}g)(f+\frac{3}{2}g)}}$$

$$\text{III. } z=\sqrt{\frac{(f+g)(f+g)(f+2g)(f+2g)(f+3g)}{1(f+\frac{3}{2}g)(f+\frac{3}{2}g)(f+\frac{5}{2}g)(f+\frac{5}{2}g)}}$$

etc.

ex qua progreſſionis lege intelligitur terminum indicis $\frac{1}{2}$ vere eſſe

$$=(f+g)^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{(f+g)}{(f+\frac{3}{2}g)}\,\frac{(f+2g)}{(f+\frac{3}{2}g)}\,\frac{(f+2g)}{(f+\frac{5}{2}g)}\,\frac{(f+3g)}{(f+\frac{5}{2}g)}}$$

$(f+3g)$

$$\frac{(f+3g)\,(f+4g)\,(f+4g)\,(f+5g)\,(f+5g)\,(f+6g)}{(f+\frac{7}{2}g)\,(f+\frac{7}{2}g)\,(f+\frac{9}{2}g)\,(f+\frac{9}{2}g)\,(f+\frac{11}{2}g)\,(f+\frac{11}{2}g)}\ \text{etc.}$$

§. 7. Nunc igitur non ſolum certum eſt hac expreſſione infinita terminum ſeriei aſſumtae

$$\overset{1}{(f+g)}+(f+g)\overset{2}{(f+2g)}+(f+g)\overset{3}{(f+2g)}(f+3g)+\ \text{etc.}$$

cuius index eſt $=\frac{1}{2}$, exhiberi, ſed etiam eadem expreſſio inuenta ad quadraturas curuarum reducitur. Poſito enim $n=\frac{1}{2}$, ob $p=1.$ et $q=2.$ fit $\int dx(-lx)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{1.2.}\int dx\sqrt{(x-xx)}$; quae expreſſio debito modo integrata dat radicem quadratam ex area circuli cuius diameter eſt $=1$: vel poſita $1:\pi$ ratione diametri ad peripheriam, erit $\int dx(-lx)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Hinc ergo idem terminus, cuius index $=\frac{1}{2}$, quem poſuimus z reperitur $=\frac{g\sqrt{\pi g}}{(2f+3g)\int x^{f:g}dx\sqrt{(1-x)}}$ $=\frac{\sqrt{\pi g}}{(2f+3g)\int y^{f+g-1}dy\sqrt{(1-y^g)}}$; intergrali hoc eodem tractato modo, quo ante ratione variabilis x eſt praeſcriptum. At per reductionem formularum huius modi integralium eſt $\int y^{f+g-1}dy\sqrt{(1-y^g)}=\frac{2fg}{(2f+g)(2f+3g)}\int\frac{y^{f-1}dy}{\sqrt{(1-y^g)}}=$ $\frac{2f}{2f+3g}\int y^{f-1}dy\sqrt{(1-y^g)}$. His ſubſtitutis reperitur

$$\frac{(2f+g)(2f+3g)(2f+3g)(2f+5g)(2f+5g)(2f+7g)}{(2f+2g)(2f+2g)(2f+4g)(2f+4g)(2f+6g)(2f+6g)}\ \text{etc.}$$

$$=\frac{2ff(2f+g)}{\pi g}\left(\int y^{f-1}dy\sqrt{(1-y^g)}\right)^2=\frac{2ffg}{\pi(2f+fg)}\left(\frac{\int y^{f-1}dy}{\sqrt{(1-y^g)}}\right)^2.$$

Per hanc igitur aequationem innumerabiles quadraturae in factores infinitos, et viciſſim huiusmodi factorum infinitorum valores in quadraturas curuarum transformari poſſunt.

§. 8.

§. 8. Vt hanc aequalitatem exemplis illuſtremus, ſit $g = 1$, eritque $\int y^{f-1}dy\surd(1-y) = \frac{2.2.4.6.8.10\ldots(2f-2)}{3.5.7.9.11.13\ldots(f+1)}$. Vnde fiet $\frac{2ff(2f+1)^2}{\pi}\;\frac{2.2.4.4\ldots\ldots(2f-2)(2f-2)}{3.3.5.5.7.7\ldots\ldots(2f+1)(2f+1)} - \frac{(2f+1)(2f+\;)(2f+3)}{(2f+2)(2f+2)(2f+4)}$. etc. quae expreſſio ordinata ſeu ad continuitatem reducta dat $\pi = 4.\frac{2.4.4.6.6.8.8.10.10.}{3.3.5.5.7.7.9.9.11.}$ etc. quae eſt ipſa formula Walliſiana, prodiitque quicunque numerus integer affirmatiuus loco f ſubſtituatur. Haec eadem expreſſio autem prodit ſi ponatur $g = 2$. et $f =$ numero cuicunque impari integro.

§. 9. Cum igitur ſit $\frac{fg}{\pi}\left(\frac{\int y^{f-1}dy}{\surd(1-y^g)}\right)^2 =$

$$\frac{(2f+g)}{2f}\frac{(2f+g)(2f+3g)(2f+3g)(2f+5g)(2f+5g)}{(2f+2g)(2f+2g)(2f+4g)(2f+4g)(2f+6g)} \text{ etc.}$$

erit pari modo $\frac{hk}{\pi}\left(\frac{\int y^{h-1}dy}{\surd(1-y^k}\right)^2 =$

$$\frac{(2h+k)}{2h}\frac{(2h+k)(2h+3k)(2h+3k)(2h+5k)(2h+5k)}{(2h+2k)(2h+2k)(2h+4k)(2h+4k)(2h+6k)} \text{ etc.}$$

Quare illa expreſſione per hanc diuiſa obtinebitur ſequens aequatio libera a peripheria circuli π

$$\frac{fg(\int y^{f-1}dy:\surd(1-y^g))^2}{hk(\int y^{h-1}dy:\surd(1-y^k))^2} = \frac{2h(2f+g)^2(2h+2k)^2(2f+3g)^2(2h+4k)^2(2f+5g)^2}{2f(2h+k)^2(2f+2g)^2(2h+3k)^2(2f+4k)^2(2h+5k)^2}$$

etc. Quae radice quadrata extracta praebet hanc aequationem

$$\frac{\int y^{f-1}dy:\surd(1-y^g)}{\int y^{h-1}dy:\surd(1-y^k)}\cdot\surd\frac{g}{k} = \frac{2h(2f+g)(2h+2k)(2f+3g)(2h+4k)(2f+5g)}{2f(2h+k)(2f+2g)(2h+3k)(2f+4g)(2h+5k)} \text{ etc.}$$

§. 10. Haec autem expreſſio infinita valorem conſtantem non habet, nam etiamſi in infinitum continuetur, tamen alium habet valorem, ſi numerus factorum capiatur par, alium ſi numerus impar. Quamobrem niſi ſit $k=g$,

quo

quo caſu perinde eſt, vbi multiplicatio abrumpatur, bini factores coniunctim ſunt accipiendi, quo facto binae obtinebuntur aequationes, prout numerus factorum capiatur par ſiue impar. Primo autem accurate euoluta expreſſione generali obtinebitur:

$$\frac{g\int y^{f-1}dy:\sqrt{(1-y^g)}}{k\int y^{h-1}dy:\sqrt{(1-y^k)}} = \frac{2h(2f+g)}{2f(2h+k)} \cdot \frac{(2h+2k)(2f+3g)}{(2f+2g)(2h+3k)} \cdot \frac{(2h+4k)(2f+5g)}{(2f+4g)(2h+5k)} \cdot \frac{(2h+6k)(2f+7g)}{(2f+6g)(2h+7k)}$$

etc. Sumendis autem alteris terminorum paribus erit

$$\frac{f\int y^{f-1}dy:\sqrt{(1-y^g)}}{h\int y^{h-1}dy:\sqrt{(1-y^k)}} = \frac{(2f+g)(2h+2k)}{(2h+k)(2f+2g)} \cdot \frac{(2f+3g)(2h+4k)}{(2h+3k)(2f+4g)} \cdot \frac{(2f+5g)(2h+6k)}{(2h+5k)(2f+6g)} \cdot \frac{(2f+7g)(2h+8k)}{(2h+7k)(2f+8g)}$$

etc. in quibus expreſſionibus loca, vbi operationem abrumpere licet, punctis ſunt diſtincta.

§. 11. Conſideremus autem attentius caſum, quo eſt $k = g$ quippe quo expreſſio infinita tanquam ex ſimplicibus factoribus conſtans concipi poteſt; eritque

$$\frac{\int y^{f-1}dy:\sqrt{(1-y^g)}}{\int y^{h-1}dy:\sqrt{(1-y^g)}} = \frac{2h(2f+g)(2h+2g)(2f+3g)(2h+4g)}{2f(2h+g)(2f+2g)(2h+3g)(2f+4g)}$$

quae expreſſio, quo minus cum praecedente ob eaſdem litteras confundatur, ponamus hic $2f=a$ et $2h=b$ atque $y=x^2$, quo ſubſtituto prodibit

$$\frac{\int x^{2f-1}dx:\sqrt{(1-x^{2g})}}{\int x^{b-1}dx:\sqrt{(1-x^{2g})}} = \frac{b(a+g)(b+2g)(a+3g)(b+4g)(a+5g)}{a(b+g)(a+2g)(b+3g)(a+4g)(b+5g)}.$$

etc. quae expreſſio cum priori. §. 9. data, quae facto pariter $y=x^2$, tranſit in hanc

$$\frac{4fg}{\pi}\left(\frac{\int x^{2f-1}dx}{\sqrt{(1-x^{2g})}}\right)^2 = \frac{(2f+g)(2f+g)(2f+3g)(2f+3g)(2f+5g)(2f+5g)}{2f(2f+2g)(2f+2g)(2f+4g)(2f+4g)(2f+6g)} \text{ etc.}$$

comparata, inſignes manifeſtabit proprietates, quarum veritas alias vix oſtendi poterit.

§. 12. Statim enim patet ſi ponatur $a=2f$; et $b=2f+g$, illam expreſſionem infinitam in hanc transmutari; quamobrem etiam expreſſiones illis aequales, quadraturas

cur-

curuarum continentes, hoc caſu fient aequales, ex quo ſequens emergit aequalitas: $\frac{\int x^{2f-1}\, dx : \sqrt{(1-x^{2g})}}{\int x^{2f+g-1}\, dx : \sqrt{(1-x^{2g})}} = \frac{4fg}{\pi} (\int x^{2f-1}\, dx : \sqrt{(1-x^{2g})})^2$, ſi quidem ponatur poſt integrationem $x = 1$. Hinc igitur ſequitur fore $\pi = 4fg \int \frac{x^{2f-1}\, dx}{\sqrt{(1-x^{2g})}} \cdot \int \frac{x^{2f+g-1}\, dx}{\sqrt{(1-x^{2g})}}$: ſiue poſito $2f = a$, erit $\pi = 2ag \int \frac{x^{a-1}\, dx}{\sqrt{(1-x^{2g})}} \cdot \int \frac{x^{a+g-1}\, dx}{\sqrt{(1-x^{2g})}}$: quod ſane eſt theorema maxime notatu dignum, cum eius beneficio productum duorum integralium, quorum ſaepiſſime neutrum exhiberi poteſt, aſſignari queat.

§ 13. Veritas huius theorematis quidem facile declaratur iis caſibus, quibus altera formula integralis vel abſolute integrationem admittit vel a circuli quadratura pendet. Ponamus enim $g = 1$, et $a = 1$; vtique erit $\pi = 2 \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} \cdot \int \frac{x\, dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$ nam $2\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$ poſito poſt integrationem $x = 1$ dat ipſam quantitatem π; atque $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{(1-xx)}} = 1 - \sqrt{(-xx)}$ facto $x = 1$ fit $= 1$. Simili modo ſi $a = 2$ manente $g = 1$ perſpicitur fore $\pi = 4\int \frac{x\, dx}{\sqrt{(1-xx)}} \cdot \int \frac{xx\, dx}{\sqrt{(1-xx)}}$ nam eſt $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{(1-xx)}} = 1$, et $\int \frac{xx\, dx}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{\pi}{4}$; quibus caſibus theorematis veritas aliunde cognita, confirmatur.

§. 14. Reliqui autem caſus, quibus neutra quantitas integralis vel actu vel per quadraturam circuli exhiberi poteſt, totidem praebent theoremata maxime abſtruſae indaginis. Ita poſito $g = 2$ et $a = 1$ fiet $\pi = 4 \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}} \cdot \int \frac{xx\, dx}{\sqrt{(1-x^4)}}$; vbi $\int \frac{xx\, dx}{\sqrt{(1-x^4)}}$ exhibet applicatam in curua elaſti-

ca

ca rectangula, $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}$ vero arcum elaſticae abſciſſae x reſpondentem. Quocirca rectangulum ex arcu elaſticae abciſſae 1 reſpondente et applicata reſpondente aequabitur areae circuli, cuius diameter eſt abſciſſa illa 1; quae proprietas elaſticae fortaſſe alia methodo vix ac ne vix quidem cognoſci demonſtrarique poterit.

§. 15. Antequam autem hunc elaſticae caſum relinquam, iuuabit vtrumque integrale per ſeriem ordinariam exprimere caſu ſaltem quo $x = 1$. Cum enim ſit $\frac{1}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{(1-x^2)}}$ atque $(1+xx)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^4 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^6 +$ etc. ſingula membra a circuli quadratura pendebunt. Abſoluta autem vtraque integratione pro caſu $x = 1$ erit $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{\pi}{2}(1 - \frac{1}{4} + \frac{1 \cdot 9}{4 \cdot 16} - \frac{1 \cdot 9 \cdot 25}{4 \cdot 16 \cdot 36} +$ etc. atque $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{\pi}{2}(\frac{1}{2} - \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 9 \cdot 5}{4 \cdot 16 \cdot 6} - \frac{1 \cdot 9 \cdot 25 \cdot 7}{4 \cdot 16 \cdot 36 \cdot 8} +$ etc.) Hinc autem approximando prodit tam prope $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{5}{6}\frac{\pi}{2}$ et $\int \frac{xx\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{3}{5}$.

§. 16. Si fuerit $a = 1$ erit $\pi = 2g \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^{2g})}} \cdot \int \frac{x^g dx}{\sqrt{(1-x^{2g})}}$ quae duae expreſſiones integrales ita ſunt comparatae, vt ſi fuerit $\int \frac{x^g dx}{\sqrt{(1-x^{2g})}}$ applicata curuae cuiusdam abſciſſae x reſpondens, futura ſit $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^{2g})}}$ ipſa eiusdem curuae longitudo. Quamobrem ſi in hac curua ſumatur abſciſſa $x = 1$, erit productum ſeu rectangulum ex applicata in longitudinem curuae ad aream circuli, cuius diameter eſt abſciſſa $x = 1$, vti ſe habet 2 ad numerum g; quae pro-

 poſitio

poſitio locum habet, dummodo g fuerit numerus affirmatiuus; valores negatiui enim ſponte excipiuntur.

§. 17. Si $a-1$ minor accipiatur quam g, ita vt numeri a et g ſint primi inter ſe, ſequentia habebuntur theoremata notatu digna; nam ſi $a+g-1>2g$ tum integratio ad formulam ſimpliciorem reduci poſſet.

$$\pi = 2\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}\cdot\int\frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$$
$$\pi = 4\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}\cdot\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}}$$
$$\pi = 6\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^6)}}\cdot\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{(1-x^6)}}$$
$$\pi = 12\int\frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^6)}}\cdot\int\frac{x^4\,dx}{\sqrt{(1-x^6)}}$$
$$\pi = 8\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^8)}}\cdot\int\frac{x^4\,dx}{\sqrt{(1-x^8)}}$$
$$\pi = 24\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^8)}}\cdot\int\frac{x^6\,dx}{\sqrt{(1-x^8)}}$$
$$\pi = 10\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^{10})}}\cdot\int\frac{x^5\,dx}{\sqrt{1-x^{10})}}$$
$$\pi = 20\int\frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}}\cdot\int\frac{x^6\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}}$$

$$\pi = 30\int\frac{x^2\,lx}{\sqrt{(1-x^{10})}}\cdot\int\frac{x^7\,lx}{\sqrt{(1-x^{10})}}$$
$$\pi = 40\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}}\cdot\int\frac{x^8\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}}$$
$$\pi = 12\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^{12})}}\cdot\int\frac{x^6\,dx}{\sqrt{(1-x^{12})}}$$
$$\pi = 60\int\frac{x^4\,dx}{\sqrt{(1-x^{12})}}\cdot\int\frac{x^{10}\,dx}{\sqrt{(1-x^{12})}}$$
$$\pi = 14\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^{14})}}\cdot\int\frac{x^7\,dx}{\sqrt{(1-x^{14})}}$$
$$\pi = 28\int\frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^{14})}}\cdot\int\frac{x^8\,dx}{\sqrt{(1-x^{14})}}$$
$$\pi = 42\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^{14})}}\cdot\int\frac{x^9\,dx}{\sqrt{(1-x^{14})}}$$
$$\pi = 56\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{(1-x^{14})}}\cdot\int\frac{x^{10}\,dx}{\sqrt{(1-x^{14})}}$$
$$\pi = 70\int\frac{x^4\,dx}{\sqrt{(1-x^{14})}}\cdot\int\frac{x^{11}\,dx}{\sqrt{(1-x^{14})}}$$

§. 18. Hoc ipſo igitur inuento reductio etiam formularum integralium ad ſimpliciores inſigniter eſt promota. Cum enim adhuc duae iſtae formulae $\int\frac{x^m\,dx}{\sqrt{(1-x^{2g})}}$ et $\int\frac{x^{m+n}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2g})}}$ ad ſe inuicem tantum reduci potuiſſent, ſi n erat multiplum exponentis $2g$; ita nunc reductio etiam ſuccedit, ſi n tantum ipſius g fuerit multiplum: caſu intellige, quo fit $x=1$. Quemadmodum autem ſi n eſt productum exponentis g per numerum parem, quotus, qui reſultat ex diuiſione alterius formulae per alteram, facile aſſignatur, ita e contrario, ſi n ſit factum ex g in numerum

merum imparem, tum productum formularum facillime aſſignatur.

§. 19. Haec omnia ergo huc redeunt, vt ſi cognitum fuerit integrale formulae $\int\frac{x^m dx}{\sqrt{(1-x^{2g})}}$ caſu quo $x=1$, eodem caſu etiam huius formulae $\int\frac{x^{m+n}dx}{\sqrt{(1-x^{2g})}}$ integrale, ſi ſit n multiplum ipſius g, exhiberi queat. Sit enim A integrale formulae $\int\frac{x^m dx}{\sqrt{(1-x^{2g})}}$ caſu, quo eſt $x=1$; integralia alterius formulae, ponendo g, $2g$, $3g$, etc. ſucceſſiue loco n ſequenti modo ſe habebunt.

$$\int\frac{x^m dx}{\sqrt{(1-x^{2g})}}=A$$

$$\int\frac{x^{m+g}dx}{\sqrt{(1-x^{2g})}}=\frac{\pi}{2(m+1)gA}$$

$$\int\frac{x^{m+2g}dx}{\sqrt{(1-x^{2g})}}=\frac{(m+1)A}{m+g+1}$$

$$\int\frac{x^{m+3g}dx}{\sqrt{(1-x^{2g})}}=\frac{(m+g+1)\pi}{2(m+1)(m+2g+1)gA}$$

$$\int\frac{x^{m+4g}dx}{\sqrt{(1-x^{2g})}}=\frac{(m+1)(m+2g+1)A}{(m+g+1)(m+3g+1)}$$

$$\int\frac{x^{m+5g}dx}{\sqrt{(1-x^{2g})}}=\frac{(m+g+1)(m+3g+1)\pi}{2(m+1)(m+2g+1)(m+4g+1)gA}\ \text{etc.}$$

§. 20. Cum deinde haec formula generalis $\int x^{m+ig}dx\,(1-x^{2g})^{k-\frac{1}{2}}$ denotantibus i et k numeros integros quoscunque, reduci queat ad hanc formulam $\int\frac{x^{m+ig}dx}{\sqrt{(1-x^{2g})}}$, intel-

 ligitur

ligitur illius formulae latiſſime patentis $\int x^{m+ig} dx\, (1-x^{2g})^{k-\frac{1}{2}}$ integrale aſſignari poſſe ex integrali $\int \frac{x^m dx}{\sqrt{(1-x^{2g})}}$ cognito, caſu ſaltem, quo poſt integrationem fit $x = 1$. Caſus autem, quibus i eſt numerus impar, praeter hoc integrale etiam circuli quadraturam π requirunt.

§. 21. Quemadmodum igitur per terminum indicis $\frac{1}{2}$ ſeriei ſupra §. 5. aſſumtae ad iſtas formularum integralium comparationes ſum deductus, ita operae pretium forte erit alios terminos intermedios ſimili modo inueſtigare. Quaeratur igitur terminus cuius index eſt $\frac{p}{q}$ qui ponatur $= z$, ex quo ſequentes ita ſe habebunt

$$\begin{array}{lll} \frac{p}{q} & \frac{p+q}{q} & \frac{p+2q}{q} \\ z + & \frac{z(fq+g(p+q))}{q} + & \frac{z(fq+(p+q)g)(fq+(p+2q)g)}{q^2}, + \text{etc.} \end{array}$$

Conſiderando nunc pari modo, quod haec progreſſio tandem in geometricam abeat, ſequentes orientur approximationes ad terminum z.

I. $z = 1\,(f+g)^{\frac{p}{q}}$

II. $\frac{z(fq+(p+q)g}{q} = (f+g)^{\frac{q-p}{q}}\,(f+g)^{\frac{p}{q}}\,(f+2g)^{\frac{p}{q}}$

III. $z(f+\frac{(p+q)g}{q})(f+\frac{(p+2q)}{q}g) = (f+g)^{\frac{q-p}{q}}\,(f+g)^{\frac{p}{q}}$ $(f+2g)^{\frac{q-p}{q}}\,(f+2g)^{\frac{p}{q}}\,(f+3g)^{\frac{p}{q}}$ Hinc igitur elicietur verus valor ipſius $z = \frac{(f+g)^{\frac{p}{q}}\,(f+g)^{\frac{q-p}{q}}}{1\,(f+\frac{(p+q)}{q}g)^{\frac{p}{q}}}$

$(f+$

$$\frac{(f+2g)^{\frac{p}{q}}}{(f+\frac{(p+q)}{q}g)^{\frac{(q-p)}{q}}}\cdot\frac{(f+2g)^{\frac{q-p}{q}}}{(f+\frac{(p+2q)}{q}g)^{\frac{p}{q}}}\cdot\frac{(f+3g)^{\frac{p}{q}}}{(f+\frac{(p+2q)}{q}g)^{\frac{q-p}{q}}}\cdot\frac{(f+3g)^{\frac{q-p}{q}}}{(f+\frac{(p+3q)}{q}g)^{p:q}}$$

etc. Vel paucis mutatis, vt factores infiniteſimi fiant $=1$, et expreſſio vbi libuerit abrumpi queat

$$\text{erit } \frac{z}{(f+\frac{p}{q}g)^{\frac{p}{q}}}=\frac{(f+g)^{\frac{p}{q}}}{(f+\frac{p}{q}g)^{\frac{p}{q}}}\cdot\frac{(f+g)^{\frac{q-p}{q}}}{(f+\frac{(p+q)}{q}g)^{\frac{q-p}{q}}}\cdot$$

$$\frac{(f+2g)^{\frac{p}{q}}}{(f+\frac{(p+q)}{q}g)^{\frac{p}{q}}}\cdot\frac{(f+2g)^{\frac{q-p}{q}}}{(f+\frac{(p+2q)}{q}g)^{\frac{q-p}{q}}}\cdot\frac{(f+3g)^{\frac{p}{q}}}{(f+\frac{(p+2q)}{q}g)^{\frac{p}{q}}}$$ etc. cuius

expreſſionis lex, qua factores progrediuntur, ſponte elucet.

§. 22. Eiusdem autem termini intermedii z valor ope termini generalis huius ſeriei exprimi poteſt, fiet enim $z=$

$$\frac{g^{\frac{p+q}{q}}\int dx(-lx)^{\frac{p}{q}}}{(f+\frac{(p+q)}{q}g)\int x^{f:g}dx(1-x)^{\frac{p}{q}}}.$$ Quare ſi ponatur $\int dx(-lx)^{\frac{p}{q}}=$

$$=\sqrt[q]{(1.2.3\ldots\ldots p)(\tfrac{2p}{q}+1)(\tfrac{3p}{q}+1)(\tfrac{4p}{q}+1)\ldots(\tfrac{qp}{q}+1)}$$

$$\int dx(x-x^2)^{\frac{p}{q}}.\int dx(x^2-x^3)^{\frac{p}{q}}.\int dx(x^3-x^4)^{\frac{p}{q}}\ldots\int dx(x^{q-1}-x^q)^{\frac{p}{q}}$$

$=\sqrt[q]{P}$: atque $x=y^g$, quo fit $\int x^{f:g}dx(1-x)^{\frac{p}{q}}=g\int y^{f+g-1}dy$

$$(1-y^g)^{\frac{p}{q}}=\frac{ggp}{fq+(p+q)g}\int\frac{y^{f+g-1}dy}{(1-y^g)^{\frac{q-p}{q}}}=\frac{pfgg}{q(f+\frac{p}{q}g)(f+\frac{(p+q)}{q}g)}$$

ſy

$\int \frac{y^{f-1}dy}{(1-y^g)^{\frac{q-p}{q}}}$. Ponatur porro $\int \frac{y^{f-1}dy}{(1-y^g)^{\frac{q-p}{q}}} = Q$, erit $z =$

$\frac{q(f+\frac{p}{q}g)P^{\frac{1}{q}}}{pfg^{\frac{q-p}{q}}Q}$.

§. 23. Subſtituta nunc loco z ſuperiore expreſſione infinita, ſumtisque poteſtatibus exponentis q, prodibit iſta aequatio: $\frac{q^q P}{p^q f^p g^{q-p} Q^q} = \frac{f^{q-p}}{(f+\frac{p}{q}g)^{q-p}} \cdot \frac{(f+g)^p}{(f+\frac{p}{q}g)^p} \cdot$
$\frac{(f+g)^{q-p}}{(f+\frac{(p+q)}{q}g)^{q-p}} \cdot \frac{(f+2g)^p}{(f+\frac{(p+q)}{q}g)^p} \cdot \frac{(f+2g)^{q-p}}{(f+\frac{(p+2q)}{q}g)^{q-p}}$. etc.

Si igitur pari modo ponatur $\int \frac{y^{h-1}dy}{(1-y^g)^{\frac{q-p}{q}}} = R$, erit

$\frac{p^q h^p g^{q-p} R^q}{q^q P} = \frac{(h+\frac{p}{q}g)^{q-p}}{h^{q-p}} \cdot \frac{(h+\frac{p}{q}g)^p}{(h+g)^p} \cdot \frac{(h+\frac{(p+q)}{q}g)^{q-p}}{(h+g)^{q-p}}$ etc.

quae duae expreſſiones in ſe mutuo ductae dabunt $\frac{h^p R^q}{f^p Q^q}$

$= \frac{f^{q-p}(h+\frac{p}{q}g)^q (f+g)^q (h+\frac{(p+q)}{q}g)^q (f+2g)^q}{h^{q-p}(f+\frac{p}{q}g)^q (h+g)^q (f+\frac{(p+q)}{q}g)^q (h+2g)^q}$
$\frac{(h+\frac{(p+2q)}{q}g)^q}{(f+\frac{(p+2q)}{q}g)^q}$ etc.

§. 24.

§. 24. Si ergo vtrinque multiplicetur per $\frac{fp}{bp}$ atque radix poteſtatis q extrahatur reperietur $\frac{R}{Q} = \frac{f(b+\frac{p}{q}g)}{b(f+\frac{p}{q}g)}$

$$\frac{(f+g)(b+\frac{(p+q)}{q}g)(f+2g)(b+\frac{(p+2q)}{q}g)}{(b+g)(f+\frac{(p+q)}{q}g)(b+2g)(f+\frac{(p+2q)}{q}g)} \text{ etc.} =$$

$\frac{\int y^{b-1}dy(1-y^g)^{\frac{p-q}{q}}}{\int y^{f-1}dy(1-y^g)^{\frac{p-q}{q}}}$, in quibus integralibus cum ita fuerint accepta, vt euaneſcant poſito $y=0$, fieri debet $y=1$, quo facto habebitur per quadraturas valor expreſſionis infinitae propoſitae. Ope huius igitur expreſſionis infinitae altera quadratura ad alteram, ſiquidem ponatur $y=1$, reduci poterit.

§. 25. Vt autem hinc eiusmodi integralium comparationes deducamus, ſicuti ex priori caſu, quo erat $p=1$ et $q=2$, ponamus hic $p=1$ et $q=3$; fietque $P = \frac{10}{z}$

$\int dx(x-x^2)^{\frac{1}{3}} . \int dx(x^2-x^3)^{\frac{1}{3}}$ et $Q = \frac{\int y^{f-1}dy}{(1-y^g)^{\frac{2}{3}}}$. atque $R =$

$\frac{\int y^{b-1}dy}{(2-y^g)^{\frac{2}{3}}}$. Erit ergo $\frac{27P}{fg^2Q^3} = \frac{f \quad . \quad (f \quad . \quad (f+g)}{(f+\frac{1}{3}g)(f+\frac{1}{3}g)(f+\frac{1}{3}g)}$

$\frac{(f+g)(f+g)(f+2g)}{(f+\frac{4}{3}g)(f+\frac{4}{3}g)(f+\frac{4}{3}g)}$ etc. atque $\frac{R}{Q} = \frac{f(b+\frac{1}{3}g)(f+g)}{b(f+\frac{1}{3}g)(b+g)}$

$\frac{(b+\frac{4}{3}g)(f+2g)(b+\frac{7}{3}g)}{(f+\frac{4}{3}g)(b+2g)(f+\frac{7}{3}g)}$ etc. quae duae expreſſiones, cum in illa vna reuolutio ex tribus hic autem ex duobus factoribus conſtet, in ſe mutuo transformari nequeunt; quicquid etiam loco b ſubſtituatur.

§. 26. Sit igitur $S = \frac{\int y^{x-1}\,dy}{(1-y^g)^{\frac{2}{3}}}$ erit $\frac{S}{Q} = \frac{f(k+\frac{1}{3}g)}{k(f+\frac{1}{3}g)}$ $\frac{(f+g)(k+\frac{4}{3}g)(f+2g)(k+\frac{7}{3}g)}{(k+g)(f+\frac{4}{3}g)(k+2g)(f+\frac{7}{3}g)}$ etc. quae expreſſio cum praecedente coniuncta dabit $\frac{RS}{Q^2} = \frac{f.\,f}{h.\,k.}\,\frac{(h+\frac{1}{3}g)(k+\frac{1}{3}g)}{(f+\frac{1}{3}g)(f+\frac{1}{3}g)}$ $\frac{(f+g)(f+g)(h+\frac{4}{3}g)}{(h+g)(k+g)(f+\frac{4}{3}g)}$ etc. quae expreſſio in illam ipſi $\frac{27\,P}{fg^2 Q^3}$ aequalem conuertetur, ponendo $h = f + \frac{1}{3}g$, et $k = f + \frac{2}{3}g$. Quamobrem habebitur iſta aequatio $\frac{27\,P}{fg^2} = Q\,RS$, ſeu ſubſtitutis veris valoribus erit $90\int dx(x-x^2)^{\frac{1}{3}}.$ $\int dx(x^2-x^3)^{\frac{1}{3}} = fg^2 \int \frac{y^{f-1}\,dy}{(1-y^g)^{\frac{2}{3}}} \cdot \int \frac{y^{f+\frac{1}{3}g-1}\,dy}{(1-y^g)^{\frac{2}{3}}} \cdot \int \frac{y^{f+\frac{2}{3}g-1}\,dy}{(1-y^g)^{\frac{2}{3}}}.$

§. 27. Antequam autem haec vlterius proſequamur conueniet valori ipſius P commodiorem formam generaliter tribui. Facto autem $x = z^q$, cum ſit $\int dx(x^n - x^{n+1})^{\frac{p}{q}} = \frac{npq}{(n+1)((n+1)p+q)} \int \frac{z^{np-1}\,dz}{(1-z^q)^{\frac{q-p}{q}}}$, poſt ſubſtitutionem prodibit

$$P = 1.2.3\ldots\ldots p.\ \frac{p}{q}^{q-1} \cdot \int \frac{z^{p-1}\,dz}{(1-z^q)^{\frac{q-p}{q}}} \cdot \int \frac{z^{2p-1}\,dz}{(1-z^q)^{\frac{q-p}{q}}}$$

$\cdot \int \frac{z^{3p-1}\,dz}{(1-z^q)^{\frac{q-p}{q}}} \ldots\ldots \int \frac{z^{(q-1)p-1}\,dz}{(1-z^q)^{\frac{q-p}{q}}}.$ Ex qua expreſſione ſi extrahatur radix poteſtatis q, prodibit valor ipſius $\int dx\,(-1x)^{\frac{p}{q}}$.

§. 28.

§. 28. Poſito nunc $p = 1$ et $q = 3$ prodibit $P = \frac{1}{3}$ $\int \frac{dz}{(1-z^3)^{\frac{2}{3}}} \cdot \int \frac{z\,dz}{(1-z^3)^{\frac{2}{3}}}$. Facto autem $y = z^3$; obtinebitur ſequens aequatio: $\int \frac{dz}{(1-z^3)^{\frac{2}{3}}} \cdot \int \frac{z\,dz}{(1-z^3)^{\frac{2}{3}}} = 3fg^2$ $\int \frac{z^{3f-1}dz}{(1-z^{3g})^{\frac{2}{3}}} \cdot \int \frac{z^{3f+g-1}dz}{(1-z^{3g})^{\frac{2}{3}}} \cdot \int \frac{z^{3f+2g-1}dz}{(1-z^{3g})^{\frac{2}{3}}}$. Si nunc ponatur $3f = a$ orietur ſequens aequatio notatu digna; $\int \frac{dz}{(1-z^3)^{\frac{2}{3}}} \cdot \int \frac{z\,dz}{(1-z^3)^{\frac{2}{3}}} = ag^2 \int \frac{z^{a-1}dz}{(1-z^{3g})^{\frac{2}{3}}} \cdot \int \frac{z^{a+g-1}dz}{(1-z^{3g})^{\frac{2}{3}}} \cdot \int \frac{z^{a+2g-1}dz}{(1-z^{3g})^{\frac{2}{3}}}$. Quae cum ſuperiore $\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)}} = ag \int \frac{z^{a-1}dz}{\sqrt{(1-z^{2g})}} \cdot \int \frac{z^{a+g-1}dz}{\sqrt{(1-z^{2g})}}$ comparata iam quodammodo indicat, quo modo ſequentes huius generis aequationes ſe ſint habiturae.

§. 29. Antequam autem per inductionem quicquam concludendi periculum faciam, caſus nonnullos actu euoluam. Sit igitur $p = 2$ et $q = 3$ hincque reperietur $P = \frac{8}{3}$ $\int \frac{z\,dz}{(1-z^3)^{\frac{1}{3}}} \cdot \int \frac{z^3\,dz}{(1-z^3)^{\frac{1}{3}}} = \frac{8}{9} \int \frac{dz}{(1-z^3)^{\frac{1}{3}}} \cdot \int \frac{z\,dz}{(1-z^3)^{\frac{1}{3}}}$; $Q = \int \frac{y^{f-1}dy}{(1-y^g)^{\frac{1}{3}}}$; $R = \int \frac{y^{h-1}dy}{(1-y^g)^{\frac{1}{3}}}$. Expreſſiones autem infinitae ita ſe habebunt; $\frac{27 \cdot P}{8f^2gQ^3} = \frac{f}{(f+\frac{2}{3}g)} \frac{(f+g)(f+g)}{(f+\frac{2}{3}g)(f+\frac{2}{3}g)}$ $\frac{(f+g)(f+2g)(f+2g)}{(f+\frac{5}{3}g)(f+\frac{5}{3}g)(f+\frac{5}{3}g)}$ etc. et $\frac{R}{Q} = \frac{f(h+\frac{2}{3}g)(f+g)}{h(f+\frac{2}{3}g)(h+g)}$

(h+

$\frac{(h+\frac{5}{3}g)(f+2g)(h+\frac{8}{3}g)}{(f+\frac{5}{3}g)(h+2g)(f+\frac{8}{3}g)}$. Sit praeterea $S = \int \frac{y^{m-1}dy}{(1-y^g)^{\frac{1}{3}}}$ et $T = \int \frac{y^{n-1}dy}{(1-y^g)^{\frac{1}{3}}}$ erit $\frac{T}{S} = \frac{m(n+\frac{2}{3}g)(m+g)(n+\frac{5}{3}g)(m+2g)}{n(m+\frac{2}{3}g)(n+g)(m+\frac{5}{3}g)(n+2g)}$ etc. quae duae expreſſiones in ſe ductae dant $\frac{RT}{QS} =$
$\frac{fm(h+\frac{2}{3}g)(n+\frac{2}{3}g)(f+g)(m+g)(h+\frac{5}{3}g)(n+\frac{5}{3}g)}{hn(f+\frac{2}{3}g)(m+\frac{2}{3}g)(h+g)(n+g)(f+\frac{5}{3}g)(m+\frac{5}{3}g)}$ etc.

§. 30. Haec autem expreſſio ad illam, cui $\frac{27P}{8f^2gQ^3}$ aequale eſt inuentum, reduci non poteſt, niſi illa multiplicetur per $\frac{f}{f-\frac{1}{3}g}$, ita vt ſit $\frac{27P}{8fg(f-\frac{1}{3}g)Q^3} = \frac{f\,.}{(f-\frac{1}{3}g)}$ $\frac{f\,.\,(f+g)(f+g)(f+g)(f+2g)}{(f+\frac{2}{3}g)(f+\frac{2}{3}g)(f+\frac{2}{3}g)(f+\frac{5}{3}g)(f+\frac{5}{3}g)}$ etc. nunc enim fiet reductio ponendo $m = f$; $h = f - \frac{1}{3}g$, et $n = f + \frac{1}{3}g$. His igitur valoribus ſubſtitutis erit $\frac{27P}{8fg(f-\frac{1}{3}g)Q^3} = \frac{RT}{QS}$.
Cum vero ſit $S = Q$ et $R = \int \frac{y^{f-\frac{1}{3}g-1}dy}{(1-y^g)^{\frac{1}{3}}} = \frac{f+\frac{1}{3}g}{f-\frac{1}{3}g} \int \frac{y^{f+\frac{2}{3}g-1}dy}{(1-y^g)^{\frac{1}{3}}}$ et $T = \int \frac{y^{f+\frac{1}{3}g-1}dy}{(1-y^g)^{\frac{1}{3}}}$. obtinebitur haec aequatio; poſito $y = z^3$;

$$\int \frac{dz}{(1-z^3)^{\frac{1}{3}}} \cdot \int \frac{zdz}{(1-z^3)^{\frac{1}{3}}} = 3fg(3f+g) \int \frac{z^{3f-1}dz}{(1-z^{3g})^{\frac{1}{3}}} \cdot \int \frac{z^{3f+g-1}dz}{(1-z^{3g})^{\frac{1}{3}}} .$$

$\int \frac{z^{3f+2g-1}dz}{(1-z^{3g})^{\frac{1}{3}}}$. Ac ſi ponatur $3f = a$ erit $\int \frac{dz}{(1-z^3)^{\frac{1}{3}}}$.

$\int zdz$

$$\int\frac{zdz}{(1-z^3)^{\frac{1}{3}}}=ag(a+g)\int\frac{z^{a-1}dz}{(1-z^{3g})^{\frac{1}{3}}}\cdot\int\frac{z^{a+g-1}dz}{(1-z^{3g})^{\frac{1}{3}}}\cdot$$
$$\int\frac{z^{a+2g-1}dz}{(1-z^{3g})^{\frac{1}{3}}}.$$

§. 31. Ponamus $p=1$ et $q=4$; habebiturque
$$\frac{4^4P}{fg^3Q^4}=\frac{f\ .\ \ f\ .\ \ f\ .\ (f+g)(f+g)(f+g)}{(f+\frac{1}{4}g)(f+\frac{1}{4}g)(f+\frac{1}{4}g)(f+\frac{1}{4}g)(f+\frac{5}{4}g)(f+\frac{5}{4}g)}$$
etc. et $\frac{R}{Q}=\frac{f(h+\frac{1}{4}g)(f+g)(h+\frac{5}{4}g)(f+2g)}{h(f+\frac{1}{4}g)(h+g)(f+\frac{5}{4}g)(h+2g)}$ etc. Sit vero vt ante $S=\int\frac{y^{m-1}dy}{(1-y^g)^{\frac{q-p}{q}}}$; $T=\int\frac{y^{n-1}dy}{(1-y^g)^{\frac{q-p}{q}}}$; erit
$$\frac{RST}{Q^3}=\frac{f\cdot f\ \cdot\ f(h+\frac{1}{4}g)(m+\frac{1}{4}g)(n+\frac{1}{4}).\ (f+g)}{h\ .\ m\ .\ n\ (f+\frac{1}{4}g)(f+\frac{1}{4}g)(f+\frac{1}{4}g)(h+g)}\text{ etc.}$$
cuius expreſſionis 6 factores in illius quatuor ſunt transmutandi, quod fiet ponendo $h=f+\frac{1}{4}g$; $m=f+\frac{2}{4}g$; et $n=f+\frac{3}{4}g$; quo facto habebitur $4^4P=fg^3QRST$. Quare cum ſit $P=\frac{1}{4}\int\frac{dz}{(1-z^4)^{\frac{3}{4}}}\cdot\int\frac{zdz}{(1-z^4)^{\frac{3}{4}}}\cdot\int\frac{z^2dz}{(1-z^4)^{\frac{3}{4}}}$; ſi ponatur $y=z^4$ et $4f=a$ orietur iſta aequatio: $\int\frac{dz}{(1-z^4)^{\frac{3}{4}}}\cdot$
$$\int\frac{zdz}{(1-z^4)^{\frac{3}{4}}}\cdot\int\frac{zzdz}{(1-z^4)^{\frac{3}{4}}}=ag^3\int\frac{z^{a-1}dz}{(1-z^{4g})^{\frac{3}{4}}}\cdot\int\frac{z^{a+g-1}dz}{(1-z^{4g})^{\frac{3}{4}}}\cdot$$
$\int\frac{z^{a+2g-1}dz}{(1-z^{4g})^{\frac{3}{4}}}\cdot\int\frac{z^{a+3g-1}dz}{(1-z^{4g})^{\frac{3}{4}}}$ cuius cum praecedentibus caſibus, quibus erat $p=1, q=2$; et $p=1, q=3$, connexio facile perſpicitur.

§. 32. Ex his igitur licebit omnes iſtius modi aequationes, quae orientur ſi ponatur $p = 1$, et $q =$ numero cuicunque affirmatiuo integro, formare; erit ſcilicet.

$$\text{I. } \int \frac{dz}{\surd(1-z^2)} = ag \int \frac{z^{a-1}dz}{\surd(1-z^{2g})} \cdot \int \frac{z^{a+g-1}dz}{\surd(1-z^{2g})}.$$

$$\text{II. } \int \frac{dz}{(1-z^3)^{\frac{2}{3}}} \int \frac{zdz}{(1-z^3)^{\frac{2}{3}}} = ag^2 \int \frac{z^{a-1}dz}{(1-z^{3g})^{\frac{2}{3}}} \cdot \int \frac{z^{a+g-1}dz}{(1-z^{3g})^{\frac{2}{3}}} \cdot \int \frac{z^{a+2g-1}dz}{(1-z^{3g})^{\frac{2}{3}}}.$$

$$\text{III. } \int \frac{dz}{(1-z^4)^{\frac{3}{4}}} \cdot \int \frac{zdz}{(1-z^4)^{\frac{3}{4}}} \cdot \int \frac{z^2dz}{(1-z^4)^{\frac{3}{4}}} = ag^3 \int \frac{z^{a-1}dz}{(1-z^{4g})^{\frac{3}{4}}} \cdot \int \frac{z^{a+g-1}dz}{(1-z^{4g})^{\frac{3}{4}}} \cdot \int \frac{z^{a+2g-1}dz}{(1-z^{4g})^{\frac{3}{4}}} \cdot \int \frac{z^{a+3g-1}dz}{(1-z^{4g})^{\frac{3}{4}}}$$

$$\text{III. } \int \frac{dz}{(1-z^5)^{\frac{4}{5}}} \cdot \int \frac{zdz}{(1-z^5)^{\frac{4}{5}}} \cdot \int \frac{z^2dz}{(1-z^5)^{\frac{4}{5}}} \int \frac{z^3dz}{(1-z^5)^{\frac{4}{5}}} = ag^4 \int \frac{z^{a-1}dz}{(1-z^{5g})^{\frac{4}{5}}} \cdot \int \frac{z^{a+g-1}dz}{(1-z^{5g})^{\frac{4}{5}}} \cdot \int \frac{z^{a+2g-1}dz}{(1-z^{5g})^{\frac{4}{5}}} \cdot \int \frac{z^{a+3g-1}dz}{(1-z^{5g})^{\frac{4}{5}}} \cdot \int \frac{z^{a+4g-1}dz}{(1-z^{5g})^{\frac{4}{5}}}. \text{ etc.}$$

§. 33. Quo etiam eas aequationes, quae oriuntur ſi p non $= 1$, colligere queamus, ponamus $p = 3$ et $q = 4$; quo poſito, et reliquis manentibus vt ſupra, erit $\frac{4^4 P}{3^4 f^3 g Q^4} = \frac{f}{(f+\frac{3}{4}g)} \frac{(f+g)}{(f+\frac{3}{4}g)} \frac{(f+g)}{(f+\frac{3}{4}g)} \frac{(f+g)}{(f+\frac{3}{4}g)}$ etc. vbi reliqua membra ex quaternis factoribus conſtantia ex his formantur ſingulos factores quantitate g augendo. Simili vero modo erit

erit $\frac{RST}{Q^3} = \frac{f.\ f.\ f.}{h.\ m.\ .n}\ \frac{(h+\frac{3}{4}g)\ (m+\frac{3}{4}g)(n+\frac{3}{4}g)}{(f+\frac{3}{4}g)(f+\frac{3}{4}g)(f+\frac{3}{4}g)}$ etc. vbi ſeni factores vnam reuolutionem ſeu periodum conſtituunt. Ad comparationem autem inſtituendam neceſſe eſt vtramque ſeriem ita contemplari: $\frac{4^4P}{3^4f^2g(f-\frac{1}{4}g)Q^4} = \frac{f}{(f-\frac{1}{4}g)}\ \frac{f}{(f+\frac{3}{4}g)}\ \frac{(f+g)\ (f+g)}{(f+\frac{3}{4}g)(f+\frac{3}{4}g)}$ etc. $\frac{hRST}{fQ^3} = \frac{f.\ f.\ (h+\frac{3}{4}g)}{m.n.\ (f+\frac{3}{4}g)}\ \frac{(m+\frac{3}{4}g)(n+\frac{3}{4}g)(f+g)}{(f+\frac{3}{4}g)(f+\frac{3}{4}g)(h+g)}$ etc. quarum haec transmutatur in illam, ita vt fiat $\frac{4^4P}{3^4fgh(f-\frac{1}{4}g)} = QRST$, ſi fiat $h = f+\frac{1}{4}g$; $m = f-\frac{1}{4}g$; et $n = f+\frac{2}{4}g$.

§. 34. Cum igitur ſit $P = \frac{3}{2}{}^4\int\frac{z^{8}dz}{(1-z^4)^{\frac{1}{4}}}\cdot\int\frac{z^5dz}{(1-z^4)^{\frac{1}{4}}}$: $\int\frac{z^8dz}{(1-z^4)^{\frac{1}{4}}} = \frac{3^4}{32}\int\frac{dz}{(1-z^4)^{\frac{1}{4}}}\cdot\int\frac{zdz}{(1-z^4)^{\frac{1}{4}}}\cdot\int\frac{zzdz}{(1-z^4)^{\frac{1}{4}}}$. et $Q = \int\frac{y^{f-1}dy}{(1-y^g)^{\frac{1}{4}}}$; $R = \int\frac{y^{f+\frac{1}{4}g-1}dy}{(1-y^g)^{\frac{1}{4}}}$; $S = \int\frac{y^{f-\frac{1}{4}g-1}dy}{(1-y^g)^{\frac{1}{4}}} = \frac{f+\frac{2}{4}g}{f-\frac{1}{4}g}\int\frac{y^{f+\frac{2}{4}g-1}dy}{(1-y^g)^{\frac{1}{4}}}$ atque $T = \int\frac{y^{f+\frac{3}{4}g-1}dy}{(1-y^g)^{\frac{1}{4}}}$. Ex quibus poſito $y = z^4$ et $4f = a$ ſequens conficitur aequatio:

$$\frac{dz}{(1-z^4)^{\frac{1}{4}}}\int\frac{zdz}{(1-z^4)^{\frac{1}{4}}}\int\frac{zzdz}{(1-z^4)^{\frac{1}{4}}} = ag\,\frac{(a+g)(a+2g)}{1\cdot 2}\int\frac{z^{a-1}dz}{(1-z^{4g})^{\frac{1}{4}}}\cdot\int\frac{z^{a+g-1}dz}{(1-z^{4g})^{\frac{1}{4}}}\cdot\int\frac{z^{a+2g-1}dz}{(1-z^{4g})^{\frac{1}{4}}}\cdot\int\frac{z^{a+3g-1}dz}{(1-z^{4g})^{\frac{1}{4}}}.$$

§. 35. Hoc modo progrediendo reperientur ſequentes aequationes, quando p non eſt $=1$ et quidem ſi $p=2$ inuenietur.

$$\text{I. } \int \frac{dz}{(1-z^3)^{\frac{1}{3}}} \cdot \int \frac{zdz}{(1-z^3)^{\frac{1}{3}}} = ag(a+g) \int \frac{z^{a-1}dz}{(1-z^{3g})^{\frac{1}{3}}} \cdot \int \frac{z^{a+g-1}dz}{(1-z^{3g})^{\frac{1}{3}}} \cdot \int \frac{z^{a+2g-1}dz}{(1-z^{3g})^{\frac{1}{3}}}$$

$$\text{II. } \int \frac{dz}{(1-z^4)^{\frac{2}{4}}} \cdot \int \frac{zdz}{(1-z^4)^{\frac{2}{4}}} \cdot \int \frac{zzdz}{(1-z^4)^{\frac{2}{4}}} = ag^2(a+g) \int \frac{z^{a-1}dz}{(1-z^{4g})^{\frac{2}{4}}} \cdot \int \frac{z^{a+g-1}dz}{(1-z^{4g})^{\frac{2}{4}}} \cdot \int \frac{z^{a+2g-1}dz}{(1-z^{4g})^{\frac{2}{4}}} \cdot \int \frac{z^{a+\ g-1}dz}{(1-z^{4g})^{\frac{2}{4}}}$$

Generaliter autem quicquid ſit q, ſi ponatur $\frac{dz}{(1-z^q)^{\frac{q-2}{q}}} = X\,dz$ et $\frac{z^{a-1}dz}{(1-z^{qg})^{\frac{q-2}{q}}} = Y\,dz$ erit $\int X\,dz . \int zX\,dz . \int z^2 X\,dz \ldots\ldots \int z^{q-2} X\,dz = ag^{q-2}(a+g) \int Y\,dz . \int z^g Y\,dz \int z^{2g} Y\,dz \ldots\ldots \int z^{(q-1)g} Y\,dz.$

§. 36. Simili modo ſi ſit $p=3$, ac ponatur $\frac{dz}{(1-z^q)^{\frac{q-3}{q}}} = X\,dz$, et $\frac{z^{a-1}dz}{(1-z^{qg})^{\frac{q-3}{q}}} = Y\,dz$ prodibit ſequens aequatio generalis, $\int X\,dz . \int zX\,dz . \int z^2 X\,dz \ldots\ldots \int z^{q-2} X\,dz = ag^{q-3}\, \frac{(a+g)(a+2g)}{1 \cdot 2} \int Y\,dz . \int z^g Y\,dz . \int z^{2g} Y\,dz \ldots\ldots \int z^{(q-1)g} Y\,dz$. Atque hinc omnes has formulas in vnam latiſſime patentem colligi licet. Sint enim p et q numeri quicunque integri affirmatiui, ac ponatur $\frac{dz}{(1-z^q)^{\frac{q-p}{q}}} =$

X dz

Xdz et $\frac{z^{a-1}dz}{(1-z^{qg})^{\frac{q-p}{q}}} = Ydz$; habebitur $\int Xdz.\int zXdz.$
$\int z^2Xdz \ldots \int z^{q-2}Xdz = ag^{q-p}\frac{(a+g)(a+2g)(a+3g)\ldots(a+(p-1)g)}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ (p-1)}.$
$\int Ydz.\int z^gYdz.\int z^{2g}Ydz \ldots \int z^{(q-1)g}Ydz.$

§ 37. Cum autem ſit $\int z^{q-1}Xdz = \frac{1}{p}$, ſi per hunc factorem vtrinque multiplicetur proueniet ſequens aequatio ſatis elegans: $\frac{a(a+g)(a+2g)(a+3g)\ldots(a+(p-1)g)}{1.\ 2.\ 3.\ 4\ \ldots\ p}g^{q-p} = \frac{\int Xdz}{\int Ydz}.$ $\frac{\int zXdz}{\int z^gYdz}.\frac{\int z^2Xdz}{\int z^{2g}Ydz}.\frac{\int z^3Xdz}{\int z^{3g}Ydz}\ldots\frac{\int z^{q-1}Xdz}{\int z^{(q-1)g}Ydz}$ quae expreſſio omnes hactenus inuentas in ſe complectitur; atque ob inſignem ordinem eſt notatu digna.

§. 38. Progrediar nunc ad aliam methodum, cuius ope ad huiusmodi expreſſiones ex factoribus innumerabilibus conſtantes peruenire licet, quae magis ad analyſin eſt accommodata. Obſeruaui enim ex reductione formularum integralium ad alias iſtiusmodi expreſſiones obtineri poſſe. Sit enim propoſita iſta formula integralis $\int x^{m-1}dx(1-x^{nq})^{\frac{p}{q}}$, quae non difficulter transmutatur in hanc expreſſionem $\frac{x^m(1-x^{nq})^{\frac{p+q}{q}}}{m} + \frac{m+(p+q)n}{m}\int x^{m+nq-1}dx(1-x^{nq})^{\frac{p}{q}}$. Si ergo m et $\frac{p+q}{q}$ fuerint numeri affirmatiui, atque integralia ita capiantur, vt euaneſcant, poſito $x=0$, tumque ponatur $x=1$, fiet $\int x^{m-1}dx(1-x^{nq})^{\frac{p}{q}} = \frac{m+(p+q)n}{m}\int x^{m+nq-1}dx(1-x^{nq})^{\frac{p}{q}}$.

§. 39. Cum deinde ſimili modo ſit $\int x^{m+nq-1}dx(1-x^{nq})^{\frac{p}{q}} = \frac{m+(p+2q)n}{m+nq}\int x^{m+2nq-1}dx(1-x^{nq})^{\frac{p}{q}}$ erit quoque $\int x^{m-1}dx(1-x^{nq})^{\frac{p}{q}} = \frac{(m+(p+q)n)(m+(p+2q)n)}{m(m+nq)}\int x^{m+2nq-1}dx(1-x^{nq})^{\frac{p}{q}}$. Hac ergo

ergo reductione in infinitum continuata prodibit: $\int x^{m-1}dx(1-x^{nq})^{\frac{p}{q}} = \frac{(m+(p+q)n)(m+(p+2q)n)(m+(p+3q)n)\ldots\ldots(m+(p+\infty q)n)}{m\cdot(m+nq)(m+2nq)\ldots\ldots(m+\infty nq)} \int x^{m+\infty nq-1}dx(1-x^{nq})^{\frac{p}{q}}$. Ac ſimili modo eſt $\int x^{\mu-1}dx(1-x^{nq})^{\frac{p}{q}} = \frac{(\mu+(p+q)n)(\mu+(p+2q)n)(\mu+(p+3q)n)\ldots\ldots(\mu+(p+\infty q)n)}{\mu\,(\mu+nq)\,(\mu+2nq)\ldots\ldots(\mu+\infty nq)} \int x^{\mu+\infty nq-1} dx(1-x^{nq})^{\frac{p}{q}}$; dummodo m, et nq et $\frac{p+q}{q}$ ſint numeri affirmatiui, ſeu nihilo maiores.

§. 40. Quoniam autem ſi m eſt infinitum fit $\int x^{m}dx(1-x^{nq})^{\frac{p}{q}} = \int x^{m+\alpha}dx(1-x^{nq})^{\frac{p}{q}}$, quicunque numerus finitus loco α accipiatur, vti ex paragr. 38 colligitur, erit quoque $\int x^{m+\infty nq-1}dx(1-x^{nq})^{\frac{p}{q}} = \int x^{\mu+\infty nq-1}dx(1-x^{nq})^{\frac{p}{q}}$. Quamobrem ſi praecedentium expreſſionum altera per alteram diuidatur, proueniet iſta aequatio: $\frac{\int x^{m-1}dx(1-x^{nq})^{\frac{p}{q}}}{\int x^{\mu-1}dx(1-x^{nq})^{\frac{p}{q}}} = \frac{\mu(m+(p+q)n)(\mu+nq)(m+(p+2q)n)(\mu+2nq)(m+(p+3q)n)(\mu+3nq)}{m(\mu+(p+q)n)(m+nq)(\mu+(p+2q)n)(m+2nq)(\mu+(p+3q)n)(m+3nq)}$ etc. in infinitum, cuius expreſſionis ope innumerabilia producta ex infinitis factoribus conſtantia exhiberi poſſunt, quorum valores per quadraturas curuarum aſſignari poterunt.

§. 41. Si altera formula integralis admittat integrationem, tum commoda expreſſio infinita pro altero integrali habebitur. Sit enim $\mu = nq$, erit $\int x^{\mu-1}dx(1-x^{nq})^{\frac{p}{q}} = \frac{1}{(p+q)n}$, quo valore ſubſtituto prodibit $\int x^{m-1}dx(1-x^{nq})^{\frac{p}{q}} = \frac{1}{(p+q)n}\cdot\frac{nq(m+(p+q)n)2nq(m+(p+2q)n)3nq}{m(p+2q)n(m+nq)(p+3q)n(m+2nq)}$ etc. cuius ope pro innumerabilibus integralibus expreſſiones per continuos factores in infinitum excurrentes inueniri poſſunt; eo ſaltem caſu quo $x = 1$; quippe qui plerumque potiſſimum deſideratur.

§. 42.

§. 42. Ponatur n loco nq, et prodibit: $\int x^{m-1}dx (1-x^n)^{\frac{p}{q}} = \frac{q}{(p+q)n} \cdot \frac{n(mq+(p+q)n) 2n(mq+(p+2q)n) 3n(mq+(p+3q)n)}{m(p+2q)n\ (m+n)\ (p+3q)n\ (m+2n)\ (p+4q)n}$ etc. quae in binos factores reſoluta fit ſimplicior euaditque $\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{\frac{p}{q}} = \frac{q}{(p+q)n} \cdot \frac{1(mq+(p+q)n)}{m(p+2q)} \cdot \frac{2(mq+(p+2q)n)}{(m+n)(p+3q)} \cdot \frac{3(mq+(p+3q)n)}{(m+2n)(p+4q)}$ etc. vnde ſequentia exempla notabiliora deducuntur.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}} = 1 . \frac{1\cdot 4}{1\cdot 3} . \frac{2\cdot 8}{3\cdot 5} . \frac{3\cdot 12}{5\cdot 7} \text{ etc.} = \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7} \text{ etc.}$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{(1-xx)}} = 1 . \frac{1\cdot 6}{2\cdot 3} . \frac{2\cdot 10}{4\cdot 5} . \frac{3\cdot 14}{6\cdot 7} \text{ etc.} = 1$$

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{(1-xx)}} = 1 . \frac{1\cdot 8}{3\cdot 3} . \frac{2\cdot 12}{5\cdot 5} . \frac{3\cdot 16}{7\cdot 7} \text{ etc.} = \frac{2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8}{3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7} \text{ etc.}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^3)}} = \frac{2}{3} . \frac{1\cdot 5\cdot 2 . 11\cdot 3\cdot 17\cdot 4\cdot 23\cdot 5\cdot 29}{1\cdot 3\cdot 4 . 5\cdot 7\cdot 7\cdot 10\cdot 9\cdot 13 . 11} \text{ etc.}$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{(1-x^3)}} = \frac{2}{3} . \frac{1\cdot 7 . 2\cdot 13\cdot 3 . 19\cdot 4\ 25 . 5 . 31}{2 . 3\cdot 5\cdot 5\cdot 8\cdot 7\cdot 11\cdot 9 . 14\cdot 11} \text{ etc.}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{1}{2} . \frac{1\cdot 6\cdot 2 . 14\cdot 3\cdot 22\cdot 4 . 30}{1\ 3\cdot 5\cdot 5 . 9\cdot 7\ 13 . 9} \text{ etc.} = \frac{1}{2} . \frac{2\cdot 3 . 4 . 7 . 6\cdot 11 . 8\cdot 15}{1\cdot 3 . 5 . 5\cdot 9\cdot 7\cdot 13 . 9} \text{ etc.}$$

$$\int \frac{xxdx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{1}{2} . \frac{1\cdot 10\cdot 2\cdot 18 . 3\cdot 26 . 4\cdot 34}{3\cdot 3\cdot 7\cdot 5 . 11 . 7\cdot 15 . 9} \text{ etc.}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} = \frac{1}{2} . \frac{3 . 3 . 6\cdot 6 . 9\cdot 9\cdot 12 . 12\cdot}{1\cdot 5\cdot 4 . 8 . 7 . 11\cdot 10\cdot 14} \text{ etc.}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)}} = \frac{1}{3} . \frac{4 . 4\cdot 8\cdot 8 . 12\cdot 12\cdot 16 . 16}{1 . 7 . 5 . 11 . 9 . 15 . 13 . 19} \text{ etc.}$$

Praeterea hae expreſſiones notari merentur.

$$\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{n-m} \cdot \frac{n\cdot\ n.\ 2n\cdot\ 2n.\ 3n\ 3n}{m(2n-m)(m+n)(3n-m)(m+2n)(4n-m)} \text{ etc.}$$

$$\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{\frac{m-n}{n}} = \frac{1}{m} \cdot \frac{n.\ 2m\cdot\ 2n\ (2m+n)\ 3n\ (2m+2n)\ 4n}{m(m+n)(m+n)(m+2n)(m+2n)(m+3n)(m+3n)} \frac{(2m+3n)}{(m+4n)} \text{ etc.}$$

§. 43. Cum autem pari modo ſit $\int x^{\mu-1}dx(1-x^\nu)^{\frac{r}{s}} = \frac{s}{(r+s)\nu} \cdot \frac{1(\mu s+(r+s)\nu) 2(\mu s+(r+2s)\nu) 3(\mu s+(r+3s)\nu)}{\mu(r+2s)(\mu+\nu)(r+3s)(\mu+2\nu)(r+4s}$ etc. erit priorem expreſſionem per hanc diuidendo $\frac{\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{\frac{p}{q}}}{\int x^{\mu-1}dx(1-x^\nu)^{\frac{r}{s}}} =$

$\frac{(r+s)qv}{(p+q)sn} \cdot \frac{\mu(r+2s)(mq+(p+q)n)}{m(p+2q)(\mu s+(r+s)v)} \cdot \frac{(\mu+v)(r+3s)(mq+(p+2q)n)}{(m+n)(p+3q)(\mu s+(r+2s)v)}$ etc.
Haec igitur expreſſio infinita, quoties habet valorem finitum, toties ſummatio alterius integralis ad alterum reduci poterit. Huiusmodi autem caſus exiſtunt, quando factores numeratoris deſtruunt factores denominatoris, ita vt poſt deſtructionem finitus factorum numerus ſuperſit. Continentur enim in hac expreſſione omnes omnino reductiones formularum integralium ad alias.

§. 44. Quo autem plures iſtiusmodi expreſſiones inter ſe comparari queant, eam hoc modo accipere viſum eſt:
$\frac{\int x^{a-1}dx(1-x^b)^c}{\int x^{f-1}dx(1-x^g)^h} = \frac{(h+1)g}{(c+1)b} \cdot \frac{f(h+2)(a+(c+1)b)}{a(c+2)(f+(h+1)g)} \cdot \frac{(f+g)(h+3)(a+(c+2)b)}{(a+b)(c+3)(f+(h+2)g)}$
etc. Simili modo erit $\frac{\int x^{\alpha-1}dx(1-x^{\varepsilon})^{\gamma}}{\int x^{\zeta-1}dx(1-x^{\eta})^{\theta}} = \frac{(\theta+1)\eta}{(\gamma+1)\varepsilon} \cdot \frac{\zeta(\theta+2)(\alpha+(\gamma+1)\varepsilon)}{\alpha(\gamma+2)(\zeta+(\theta+1)\eta)} \cdot$
$\frac{(\zeta+\eta)(\theta+3)(\alpha+(\gamma+2)\varepsilon)}{(\alpha+\varepsilon)(\gamma+3)(\zeta+(\theta+2)\eta)}$ etc. quae expreſſiones, etſi re non inter ſe differunt, tamen quoniam habent formam diuerſam, inter ſe comparari poterunt.

§. 45. Vt nunc ex his expreſſionibus eadem theoremata eliciamus, quae ſupra inuenimus, ſit $\theta = \gamma = h = c$; $\eta = \varepsilon = g = b$; erit $\frac{\int x^{a-1}dx(1-x^b)^c}{\int x^{f-1}dx(1-x^b)^c} = \frac{f(a+(c+1)b)(f+b)}{a(f+(c+1)b)(a+b)}$
$\frac{(a+(c+2)b)(f+2b)(a+(c+3)b)}{(f+(c+2)b)(a+2b)(f+(c+3)b)}$ etc. atque altera formula
$\frac{\int x^{\alpha-1}dx(1-x^b)^c}{\int x^{\zeta-1}dx(1-x^b)^c} = \frac{\zeta(\alpha+(c+1)b)(\zeta+b)(\alpha+(c+2)b)(\zeta+2b)(\alpha+(c+3)b)}{\alpha(\zeta+(c+1)b)(\alpha+b)(\zeta+(c+2)b)(\alpha+2b)(\zeta+(c+3)b)}$
etc. Harum expreſſionum productum ſi ponatur $= \frac{f}{a}$ oportet eſſe $\frac{(a+(c+1)b)(f+b)\zeta(\alpha+(c+1)b)}{(f+(c+1)b)(a+b)\alpha(\zeta+(c+1)b)} = 1$, hoc enim ſi fuerit, totarum expreſſionum infinitarum productum fiet $= \frac{f}{a}$. At hoc obtine-

tinebitur faciendo $\alpha = a + (c+1)b$; $\zeta = f + (c+1) b$; fietque $c = -\frac{1}{2}$, ita vt ſit $\alpha = a + \frac{1}{2}b$; $\zeta = f + \frac{1}{2}b$, eritque ideo $\int \frac{x^{a-1}dx}{\sqrt{(1-x^b)}} \cdot \int \frac{x^{a+\frac{1}{2}b-1}dx}{\sqrt{(1-x^b)}} = \frac{f}{a} \int \frac{x^{f-1}dx}{\sqrt{(1-x^b)}} \cdot \int \frac{x^{f+\frac{1}{2}b-1}dx}{\sqrt{(1-x^b)}}$ ſeu ſi ponatur $x = z^2$; erit $\int \frac{z^{a-1}dz}{\sqrt{(1-z^{2b})}} \cdot \int \frac{z^{a+b-1}dz}{\sqrt{(1-z^{2b})}} = \frac{f}{a} \cdot \int \frac{z^{f-1}dz}{\sqrt{(1-z^{2b})}} \cdot \int \frac{z^{f+b-1}dz}{\sqrt{(1-z^{2b})}}$ poſitis a et f loco $2a$ et $2f$. Haec autem aequatio nil aliud eſt niſi Theorema ſupra inuentum §. 12. facto enim $f = b$ fit $\int \frac{z^{2b-1}dz}{\sqrt{(1-z^{2b})}} = \frac{1}{b}$ et $\int \frac{z^{b-1}dz}{\sqrt{(1-z^{2b})}} = \frac{\pi}{2b}$; vnde fiet $\pi = 2ab \int \frac{z^{a-1}dz}{\sqrt{(1-z^{2b})}} \cdot \int \frac{z^{a+b-1}dz}{\sqrt{(1-z^{2b})}}$.

§. 46. Simili modo alia huius generis theoremata inveniri poſſunt; ſit enim $g = b$; $h = c$; $\eta = \beta = b$ et $\theta = \gamma$, quaeraturque caſus, quo productum ambarum expreſſionum fiat $= 1$. Hoc autem obtinebitur ſi ſit $\frac{f(\alpha+(c+1)b)\zeta(\alpha+(\gamma+1)b)}{a(f+(c+1)b)\alpha(\zeta+(\gamma+1)b)} = 1$; id quod fiet capiendo $\alpha = a + (c+1)b$; $f = a + (\gamma+1)b$; $\zeta = a$. His igitur valoribus ſubſtitutis orietur ſequens theorema non inelegans $\frac{\int x^{a-1}dx(1-x^b)^c}{\int x^{a-1}dx(1-x^b)^\gamma} \cdot \frac{\int x^{a+(c+1)b-1}dx(1-x^b)^\gamma}{\int x^{a+(\gamma+1)b-1}dx(1-x^b)^c} = 1$; ſiue ſi ponatur $c+1 = m$ et $\gamma + 1 = n$ habebitur $\int \frac{x^{a-1}dx}{(1-x^b)^{1-m}} \cdot \int \frac{x^{a+mb-1}dx}{(1-x^b)^{1-n}} =$ $\int \frac{x^{a-1}dx}{(1-x^b)^{1-n}} \cdot \int \frac{x^{a+nb-1}dx}{(1-x^b)^{1-m}}$.

§. 47. Alio inſuper modo concinnum theorema elici poterit ponendo $\gamma = h$ et $\theta = c$, manente $\eta = \beta = g = b$; atque efficiendo vt productum expreſſionum integralium fiat $= \frac{f}{a}$, quod, quo eueniat, oportet eſſe $\frac{(a+(c+1)b)(f+b)\zeta}{(f+(h+1)b)(a+b)\alpha} \cdot \frac{(\alpha+(h+1)b)}{(\zeta+(c+1)b)} = 1$. Hoc vero efficietur capiendo $\alpha = a + (c+1)b$; $\zeta = f + (h+1)b$, ex quo reperietur $c + h + 1 = 0$ ſeu $h = -1 - c$; quare ſumatur $c = -\frac{1}{2} + n$; et $h = -\frac{1}{2} - n$, atque ſequeus prodibit theorema: $\frac{f}{a} =$

$$\frac{\int x^{a-1}dx(1-x^b)^{-\frac{1}{2}+n} \cdot \int x^{a+(\frac{1}{2}+n)b-1}dx(1-x^b)^{-\frac{1}{2}-n}}{\int x^{f-1}dx(1-x^b)^{-\frac{1}{2}-n} \cdot \int x^{f+(\frac{1}{2}-n)b-1}dx(1-x^b)^{-\frac{1}{2}+n}}.$$

§. 48. Sint nunc omnes exponentes c, h, γ et θ inaequales, at $g = \beta = \eta = b$, quaeranturque caſus quibus productum ambarum expreſſionum fiat $= \frac{(h+1)(\theta+1)}{(c+1)(\gamma+1)}$. Hoc autem eueniet ſi reddatur haec forma $\frac{f(bh+2b)(a+(c+1)b)\zeta(b\theta+2b)}{a(bc+2b)(f+(h+1)b)\alpha(b\gamma+2b)} \cdot \frac{(\alpha+(\gamma+1)b)}{(\zeta+(\theta+1)b)} = 1$ quos factores ita expreſſi, vt ſinguli in ſequentibus membris quantitate b creſcant. Ponatur iam $\zeta + (\theta+1)b = bh + 2b$, ſeu $\zeta = b(1+h-\theta)$ et $\alpha + (\gamma+1)b = bc + 2b$, ſeu $\alpha = b(1+c-\gamma)$. Porro fiat $f + (h+1)b = b\theta + 2b$, ſeu $f = b(1+\theta-h)$ et $a + (c+1)b = b\gamma + 2b$ ſeu $a = b(1+\gamma-c)$. Denique debebit eſſe $\alpha = f$ et $\zeta = a$, quae duae aequationes requirunt vt ſit $c - \gamma = \theta - h$, ſiue $c + h = \gamma + \theta$. Vnde ſequens orietur Theorema: $\frac{(h+1)(\theta+1)}{(c+1)(\gamma+1)} =$

$$\frac{\int x^{b(1+\gamma-c)-1}dx(1-x^b)^c \cdot \int x^{b(1+c-\gamma)-1}dx(1-x^b)^\gamma}{\int x^{b(1+\theta-h)-1}dx(1-x^b)^h \cdot \int x^{b(1+h-\theta)-1}dx(1-x^b)^\theta}$$ dummodo ſit $c + h = \gamma + \theta$.

§. 49. Alio autem inſuper modo expreſſio illa effici poteſt $= 1$, ponendo $\alpha = a + (c+1)b$ et $\zeta = f + (h+1)$

$+1)b$; $f=b(\gamma+2)$; $a=b(\theta+2)$; ita vt ſit $\alpha=b(3+c+\theta)$ et $\zeta=b(3+\gamma+b)$. Porro autem debet eſſe $\zeta+(\theta+1)b=bb+2b$, et $\alpha+(\gamma+1)b=bc+2b$; quibus poſtulatur vt ſit $\gamma+\theta+2=0$. Ponatur ergo $\gamma=-1+n$ et $\theta=-1-n$. At ſi requiratur, vt productum ambarum expreſſionum ſit $=\frac{f(b+1)(\theta+1)}{a(c+1)(\gamma+1)}$, id obtinebitur ponendo $\alpha=a+(c+1)b$, $\zeta=f+(b+1)b$; $f=b(\gamma+1)$; $a=b(\theta+1)$ vnde erit $\alpha=b(2+c+\theta)$ et $\zeta=b(2+b+\gamma)$. Tandem vero debebit eſſe $\gamma+\theta+1=0$. Ponatur $\gamma=-\frac{1}{2}+n$ et $\theta=-\frac{1}{2}-n$; atque habebitur hoc theorema $\frac{b+1}{c+1}=\frac{\int x^{b(\frac{1}{2}-n)-1}dx(1-x^b)^c}{\int x^{b(\frac{1}{2}+n)-1}dx(1-x^b)^b}$. $\frac{\int x^{b(\frac{3}{2}+c-n)-1}dx(1-x^b)^{-\frac{1}{2}+n}}{\int x^{b\frac{3}{2}+b+n)-1}dx(1-x^b)^{-\frac{1}{2}-n}}$: in quo notandum eſt, exponentes $c, b, -\frac{1}{2}+n, -\frac{1}{2}-n$ numeros negatiuos quidem eſſe poſſe, ſed tales vt cum vnitate ad affirmatiuos tranſeant; alioquin enim integralia valorem finitum non obtinerent caſu $x=1$.

§. 50. Quemadmodum igitur non ſolum theorema ſupra inuentum circa duarum formularum integralium producta detexi hac methodo magis directa, ſed etiam alia noua elicui non minus notatu digna, ita, ſi pari modo tres eiusmodi expreſſiones in ſe inuicem ducantur, theoremata complura circa producta trium formularum integralium prodibunt; atque vltra ad quotcunque factorum numerum progredi licebit; ſed cum haec inquiſitio adeo prolixum calculum requirat, vt etiam litterae vix ſufficiant, cum ipſis theorematis praecipuis indicatis, tum via monſtrata contentus ero.

DE

DE FRACTIONIBVS CONTINVIS OBSERVATIONES.

AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. 1.

Cum anno ſuperiore incepiſſem fractiones continuas examini ſubiicere, hancque fere nouam analyſeos partem euoluere, nonnullae obſeruationes ſe interea obtulerunt, quae forte ad iſtam Theoriam excolendam non erunt incongruae. Quamobrem cum exploratio huius doctrinae non parum adiumenti analyſi allatura eſſe videatur, hoc argumentum denuo aggrediar, et quae huc ſpectantia occurrerunt, dilucide exponam. Sit igitur propoſita haec fractio continua

$$A+\cfrac{B}{C+\cfrac{D}{E+\cfrac{F}{G+\cfrac{H}{I+\text{ etc.}}}}}$$

cuius valor verus reperietur continuando ſequentem ſeriem in infinitum.

$A+\frac{B}{1.P}-\frac{BD}{PQ}+\frac{BDF}{QR}-\frac{BDFH}{RS}+$ etc. in qua ſerie litterae P, Q, R, S etc. ſequentes obtinent valores:

$P=C;\ Q=EP+D;\ R=GQ+FP;\ S=IR+HQ;$ etc. Series haec autem ſemper eſt conuergens, quantumvis creſcant vel decreſcant litterae B, C, D, E, F etc. dummodo omnes ſint affirmatiuae, quilibet terminus enim minor eſt quam praecedens, maior vero quam ſequens; id quod

quod lex, qua valores P, Q, R, S etc. formantur, ſtatim declarat.

§. 2. Si ergo viciſſim haec propoſita fuerit ſeries infinita $\frac{B}{P} - \frac{BD}{PQ} + \frac{BDF}{QR} - \frac{BDFH}{RS} +$ etc. eius ſumma commode per fractionem continuam exprimi poterit. Cum enim ſit $C = P$; $E = \frac{Q-D}{P}$; $G = \frac{R-FP}{Q}$; $I = \frac{S-HQ}{R}$, etc. habebitur fractio continua illi ſeriei aequalis haec:

$$\cfrac{B}{P + \cfrac{D}{\cfrac{Q-D}{P} + \cfrac{F}{\cfrac{R-FP}{Q} + \cfrac{H}{\cfrac{S-HQ}{R} + \cfrac{K}{etc.}}}}} \quad \text{ſeu} \quad \cfrac{B}{P + \cfrac{DP}{Q-D + \cfrac{FPQ}{R-FP + \cfrac{HQR}{S-HQ + \cfrac{KRS}{etc.}}}}}$$

Quare ſi data fuerit iſta ſeries $\frac{a}{p} - \frac{b}{q} + \frac{c}{r} - \frac{d}{s} + \frac{e}{t} -$ etc. ob $B = a$; $D = b:a$; $F = c:b$; $H = d:c$; $K = e:d$, etc. et $P = p$; $Q = q:p$; $R = pr:q$; $S = qs:pr$; $T = prt:qs$; etc. huius ſeriei $\frac{a}{p} - \frac{b}{q} + \frac{c}{r} - \frac{d}{s} + \frac{e}{t} -$ etc. ſummae aequalis erit ſequens fractio continua:

$$\cfrac{a}{p + \cfrac{b:a}{\cfrac{aq-bp}{app} + \cfrac{c:b}{\cfrac{p^2(br-cq)}{bqq} + \cfrac{d:c}{\cfrac{q^2(cs-dr)}{cp^2r^2} + \cfrac{e:d}{\cfrac{p^2r^2(dt-es)}{dq^2s^2} + etc.}}}}} = \cfrac{a}{p + \cfrac{bp^2}{aq-bp + \cfrac{acaq}{br-cq + \cfrac{bdrr}{cs-dr + \cfrac{cess}{dt-es + etc.}}}}}$$

§. 3. Vt haec exemplis nonnullis illuſtremus, ſumamus ſeriem $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} +$ etc. cuius ſumma eſt $= l\,2$ ſeu $= \int \frac{dx}{1+x}$ ſi poſt integrationem ponatur $x = 1$. erit ergo $a = b = c = d$ etc. $= 1$; $p = 1$; $q = 2$; $r = 3$; $s = 4$; etc. atque $p = 1$; $aq - bp = 1$; $br - cq = 1$; $cs - dr = 1$, etc.

Tom. XI. E Hinc

Hinc igitur fit $\int\frac{dx}{1+x} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{4}{1+\cfrac{9}{1+\cfrac{16}{1+\text{etc.}}}}}}$

ſeu huius fractionis continuae valor eſt l 2.

§. 4. Contemplemur nunc hanc ſeriem $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \text{etc.}$ cuius ſumma eſt area circuli, diametrum $= 1$ habentis, ſeu $= \int\frac{dx}{1+x^2}$ poſito poſt integrationem $x = 1$. Erit ergo $a = b = c = d = \text{etc.} = 1$ et $p = 1$; $q = 3$; $r = 5$; $s = 7$; etc. vnde fit:

$$\int\frac{dx}{1+xx} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2\ \text{etc.}}}}}}$$

quae eſt ipſa fractio continua Brounckeri, quam pro quadratura circuli exhibuit.

§. 5. Simili modo aliis huius generis ſeriebus accipiendis prodibunt ſequentes formularum integralium conuerſiones in fractiones continuas, poſito ſcilicet poſt integrationem $x = 1$:

$$\int\frac{dx}{1+x^3} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1^2}{3+\cfrac{4^2}{3+\cfrac{7^2}{3+\cfrac{10^2}{3+\text{etc.}}}}}} \quad ; \quad \int\frac{dx}{1+x^4} = \cfrac{1}{1+\cfrac{{}^2}{4+\cfrac{{}^2}{4+\cfrac{9^2}{4+\cfrac{13^2}{4\ \text{etc.}}}}}}$$

$$\int\frac{dx}{1+x^5}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1^2}{5+\cfrac{6^2}{5+\cfrac{11^2}{5+\cfrac{16^2}{5+\text{etc.}}}}}}\;;\int\frac{dx}{1+x^6}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1^2}{6+\cfrac{7^2}{6+\cfrac{13^2}{6+\cfrac{19^2}{6\ \text{etc.}}}}}}$$

§. 6. Hinc igitur ſequitur ſore generaliter:

$$\int\frac{dx}{1+x^m}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1^2}{m+\cfrac{(m+1)^2}{m+\cfrac{(2m+1)^2}{m+\cfrac{(3m+1)^2}{m+\text{etc.}}}}}}$$

poſito poſt integrationem $x=1$. Ac ſi fuerit m numerus fractus habebitur:

$$\frac{dx}{1+x^{\frac{m}{n}}}=\cfrac{1}{1+\cfrac{n}{m+\cfrac{(m+n)^2}{m+\cfrac{(2m+n)^2}{m+\cfrac{(3m+n)^2}{m+\text{etc.}}}}}}$$

§. 7. Conſideremus nunc formulam $\int\frac{x^{n-1}dx}{1+x^m}$ quae integrata et poſt integrationem facto $x=1$ praebet hanc ſeriem: $\frac{1}{n}-\frac{1}{m+n}+\frac{1}{2m+n}-\frac{1}{3m+n}+$ etc. Hinc fiet $a=b=c=d=$ etc. $=1$. et $p=n$; $q=m+n$; $r=2m+n$; $s=3m+n$; etc. Vnde habebitur

$$\int\frac{x^{n-1}dx}{1+x^m}=\cfrac{1}{n+\cfrac{n^2}{m+\cfrac{(m+n)^2}{m+\cfrac{(m+n)^2}{m+\text{etc.}}}}}$$

quae fractio continua congruit cum vltimo inuenta.

§. 8. Proponatur iam iſta formula $\int\frac{x^{n-1}dx}{(1+x^m)^{\frac{\mu}{\nu}}}$, quae integrata facto $x=1$ praebet hanc ſeriem: $\frac{1}{n}-\frac{\mu}{\nu(m+n)}$

 +

$+\frac{\mu(\mu+\nu)}{1\cdot 2\nu^2(2m+n)}-\frac{\mu(\mu+\nu)(\mu+2\nu)}{1\cdot 2\cdot 3\nu^3(3m+n)}+$ etc. quae cum generali comparata dat $a=1$; $b=\mu$; $c=\mu(\mu+\nu)$; $d=\mu(\mu+\nu)(\mu+2\nu)$; etc $p=n$; $q=\nu(m+n)$; $r=2\nu^2(2m+n)$; $s=6\nu^3(3m+n)$; $t=24\nu^4(4m+n)$; etc. atque $aq-bp=\nu m+(\nu-\mu)n$; $br-cq=\mu\nu(3\nu-\mu)m+\mu\nu(\nu-\mu)n$; $cs-dr=2\mu\nu^2(\mu+\nu)(m(5\nu-2\mu)+n(\nu-\mu))$ $dt-es=6\mu\nu^3(\mu+\nu)(\mu+2\nu)(m(7\nu-3\mu)+n(\nu-m))$ etc. quibus ſubſtitutis, factaque reductione habebitur:

$$\int\frac{x^{n-1}dx}{(1+x^m)^{\frac{\mu}{\nu}}}=\cfrac{1}{n+\cfrac{\mu n^2}{\nu m+(\nu-\mu)n+\cfrac{\nu(\mu+\nu)(m+n)^2}{(3\nu-\mu)m+(\nu-\mu)n+\cfrac{2\nu(\mu+2\nu)(2m+n)^2}{(5\nu-2\mu)m+(\nu-\mu)n+\cfrac{3\nu(\mu+3\nu)(3m+n)^2}{(7\nu-3\mu)m+(\nu-\mu)n\text{ etc.}}}}}}$$

Sit $\mu=1$ et $\nu=2$ erit $\int\frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{(1-x^m)}}=$

$$\cfrac{1}{n+\cfrac{n^2}{2m+n+\cfrac{6(m+n)^2}{5m+n+\cfrac{20(2m+n)^2}{8m+n+\cfrac{42(3m+n)^2}{11m+n+\cfrac{72(4m+n)^2}{14m+n+\text{ etc.}}}}}}}$$

§. 9. At ſi fuerit $\nu=1$ et μ numerus integer, prodibunt ſequentes fractiones continuae:

$$\int\frac{x^{n-1}dx}{(1+x^m)^2}=\cfrac{1}{n+\cfrac{2n^2}{m-n+\cfrac{1\cdot 3(m+n)^2}{m-n+\cfrac{2\cdot 4(2m+n)^2}{m-n+\cfrac{3\cdot 5(3m+n)^2}{m-n+\cfrac{4\cdot 6(4m+n)^2}{m-n+\text{ etc.}}}}}}}$$

$$\int\frac{x^{n-1}dx}{(1+x^m)^3}=\cfrac{1}{n+\cfrac{3n^2}{m-2n+\cfrac{1\cdot 4(m+n)^2}{-2n+\cfrac{2\cdot 5(2m+n)^2}{-m-2n+\cfrac{3\cdot 6(3m+n)^2}{-3m-2n+\cfrac{4\cdot 7(4m+n)^2}{-3m-2n+\text{ etc.}}}}}}}$$

quae

quae expreſſio pariter ac ſequentes ob quantitates negatiuas non conuergunt ſed diuergunt.

§. 10. Conſequuntur haec omnia ex conuerſione fractionis continuae generalis §. 1 datae in ſeriem infinitam $A + \frac{B}{IP} - \frac{BD}{PQ} + \frac{BDF}{QR} - \frac{BDFH}{RS} +$ etc. Haec eadem autem ſeries addendis binis terminis transformatur in hanc $A + \frac{BE}{IQ} + \frac{BDFI}{QS} + \frac{BDFHKN}{SV} +$ etc. Eſt vero $C = P = \frac{Q-D}{E}$; $G = \frac{S-HQ}{IQ} - \frac{F(Q-D)}{EQ}$; $L = \frac{V-MS}{NS} - \frac{K(S-HQ)}{IS}$; etc. Hinc iſta ſeries infinita $A + \frac{BE}{Q} + \frac{BDFI}{QS} + \frac{BDFHKN}{SV} +$ etc. conuertetur in ſequentem fractionem continuam:

$$A + \cfrac{B}{\cfrac{Q-D}{E} + \cfrac{D}{E + \cfrac{F}{\cfrac{E(S-HQ)-FI(Q-D)}{EIQ} + \cfrac{H}{I + \cfrac{K}{\cfrac{I(V-MS)-KN(S-HQ)}{INS} + \text{etc.}}}}}}$$

quae a fractionibus liberata tranſit in hanc:

$$A + \cfrac{BE}{Q-D + \cfrac{D}{I + \cfrac{FIQ}{E(S-HQ)-FI(Q-D) + \cfrac{EHQ}{I + \cfrac{KNS}{I(V-MS)-KN(S-HQ) + \cfrac{IMS}{I + \text{etc.}}}}}}}$$

§. 11. Si nunc viciſſim proponatur haec ſeries infinita $\frac{a}{p} + \frac{b}{q} + \frac{c}{r} + \frac{d}{s} + \frac{e}{t} +$ etc. et comparatio cum praecedente inſtituatur erit $Q = p$; $S = \frac{q}{p}$; $V = \frac{pr}{q}$; $X = \frac{qs}{pr}$; $Z = \frac{prt}{qs}$ etc. itemque $E = \frac{a}{B}$; $I = \frac{b}{BDF}$; $N = \frac{c}{BDFHK}$; etc. quibus valoribus ſeries propoſita conuertetur in hanc fractionem continuam:

$$\cfrac{a}{p\text{-}D+D\cfrac{1+bp:1}{Da(\frac{q}{p}\text{-}Hp)\text{-}b(p\text{-}D)+DHap:1\cfrac{1+cq:p}{Hb(\frac{pr}{q}-\frac{Mq}{p})\text{-}c(\frac{q}{p}\text{-}Hp)+HMbq:p\cfrac{1+dpr:q}{Mc(\frac{qs}{pr}\text{ etc.}}}}}$$

in quam fractionem continuam innumerabiles nouae quantitates ingrediuntur, quae in ſerie propoſita non inerant.

§. 12. Cum autem ſit ex §. 2. haec ſeries $\frac{b}{p}-\frac{bd}{pq}+\frac{bdf}{qr}-\frac{bdfh}{rs}+$ etc. aequalis iſti fractioni continuae

$$\cfrac{b}{p+\cfrac{dp}{q-d+\cfrac{fpq}{r-fp+\cfrac{hqr}{s-hq+\cfrac{krs}{\text{etc.}}}}}}$$

ſi haec ſeries ad praecedentem reducatur fiet $b=BE$; $d=\frac{-DFI}{E}$; $f=\frac{-HKN}{I}$; etc. $p=Q$; $q=S$; $r=V$, $s=X$ etc. Ex quo fractio continua §. praecedente data transmutabitur in hanc:

$$A+\cfrac{BE}{Q-IDFI.Q\cfrac{}{.ES+DFI-EHKN.QS\cfrac{}{IV+HKNQ-IMOR.SV\cfrac{}{NX+MORS+\text{etc.}}}}}$$

cuius lex progreſſionis facile perſpicitur. §. 13.

§. 13. Series autem illa $A + \frac{B}{P} - \frac{BD}{PQ} + \frac{BDF}{QR}$ - etc. quam primum ex fractione continua generali eliciuimus, facile transformatur in hanc formam: $A + \frac{B}{2P} + \frac{BE}{2Q} - \frac{BDG}{2PR} + \frac{BDFI}{2QS} - \frac{BDFHL}{2RT} +$ etc. quae ſi litterae C, E, G, I etc. per reliquas ope aequationum datarum exprimantur, abit in hanc: $A + \frac{B}{2P} + \frac{B(Q-D)}{2PQ} - \frac{BD(R-FP)}{2PQR} + \frac{BDF(S-HQ)}{2QRS} -$ etc. cui propterea aequalis eſt iſta fractio continua:

$$A + \cfrac{B}{P + \cfrac{DP}{Q - D + \cfrac{FPQ}{R - FP + \cfrac{HQR}{S - HQ + \text{etc.}}}}}$$

§ 14. Haec omnia igitur conſequuntur ex contemplatione fractionum continuarum immediate, pluresque huius generis obſeruationes iam in ſuperiore diſſertatione communicaui. Nunc ergo his relictis ad alia pergo, atque aliquot modos tam ad fractiones continuas perueniendi, quam datarum iſtiusmodi fractionum valores per integrationes aſſignandi. Primum itaque, cum hic Brounckeri expreſſio quadtaturae circuli ſit non ſolum demonſtrata, ſed etiam quaſi a priori inuenta, examini ſubiiciam alias ſimiles expreſſiones vel ab ipſo Brounckero vel a Walliſio inuentas, recenſentur enim a Walliſio, nec ſatis clare indicatur, vtrum Brounkerus omnes inuenerit, an eam duntaxat, quae pro circuli quadratura fuit exhibita. Poſtmodum vero etiam reliquas illas fractiones continuas, quae altioris indaginis videntur, ex principiis maxime diuerſis demonſtrabo, iſtiusque generis multo plures eruere docebo.

§. 15.

§. 15. Quae autem apud Walliſium extant huc redeunt, vt ſit productum duarum harum fractionum continuarum $= a^2 =$

$$a-1+\cfrac{1}{2(a-1)+\cfrac{9}{2(a-1)+\cfrac{25}{2(a-1)\,etc.}}} \quad \text{et} \quad a+1+\cfrac{1}{2(a+1)+\cfrac{9}{2(a+1)+\cfrac{25}{2(a+1)\,etc.}}}$$

Cum igitur ſimili modo ſit $(a+2)^2 =$

$$a+1+\cfrac{1}{2(a+1)+\cfrac{9}{2(a+1)+etc.}} \cdot a+3+\cfrac{1}{2(a+3)+\cfrac{9}{2(a+3)+etc.}}$$

reperietur hoc modo infinitum progrediendo

$$a\cdot\frac{a(a+4)(a+4)(a+8)(a+8)(a+12)(a+12)}{(a+2)(a+2)(a+6)(a+6)(a+10)(a+10)(a+14)}\ \text{etc.}$$

$$= a-1+\cfrac{1}{2(a-1)+\cfrac{9}{2(a-1)+\cfrac{25}{2(a-1)+etc.}}}$$

§. 16. Si nunc productum iſtud ex infinitis factoribus conſtans per methodum in praecedente diſſertatione traditam examinetur reperietur fore $\frac{a(a+4)(a+4)(a+8)\,etc.}{(a+2)(a+2)(a+6)(a+6)\,etc.}$ $= \frac{\int x^{a+1}dx:\sqrt{(1-x^4)}}{\int x^{a-1}dx:\sqrt{(1-x^4)}}$. Quocirca huius fractionis continuae valor

$$a-1+\cfrac{1}{2(a-1)+\cfrac{9}{2(a-1)+\cfrac{25}{2(a-1)\,etc.}}}$$

aequabitur huic expreſſioni $a\frac{\int x^{a+1}dx:\sqrt{(1-x^4)}}{\int x^{a-1}dx:\sqrt{(1-x^4)}}$ poſitio poſt vtramque integrationem $x=1$.

§. 17. Theorema hoc, quo fractionis continuae ſatis latae patentis valor per formulas integrales exprimitur, eo magis eſt notatu dignum, quo minus eius veritas eſt obvia. Nam quanquam ille caſus quo $a=2$, iam ante eſt in-

inuentus, eiusque valor per quadraturam circuli expoſitus, ceteri tamen caſus ex eo non conſequuntur. Si enim iſta fractio continua modo initio praeſcripto conuertatur in ſeriem, ad tam intricatas peruenitur formulas, vt ſumma eius minime colligi queat; praeter caſum $a = 2$. Quo circa iam pridem multam collocaui operam, vt tam veritatem iſtius theorematis demonſtrarem, quam viam detegerem, qua a' priori ad hanc ipſam fractionem continuam pertingere liceret; quae inueſtigatio, quo difficilior mihi eſt viſa, eo maiorem vtilitatem ex ea orturam eſſe, ſum arbitratus. Quamdiu autem omne ſtudium fruſtra in hoc negotio impendi, maxime dolui, methodum a Brounckero vſitatam nusquam eſſe expoſitam et forſitan omnino periiſſe.

§. 18. Quantum quidem ex Walliſii recenſione conſtat, Brounckerus ad iſtam formam deductus eſt per interpolationem huius ſeriei: $\frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} +$ etc. cuius terminos intermedios ipſam circuli quadraturam praebere Walliſius demonſtrauerat. Atque adeo indicatur initium huius interpolationis a Brounckero inſtitutae. Sibi enim propoſitum fuiſſe perhibetur, ſingulas fractiones $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}$ etc. in binos factores reſoluere, qui omnes inter ſe continuam progreſſionem conſtituant. Ita ſi fuerit $AB = \frac{1}{2}$; $CD = \frac{3}{4}$; $EF = \frac{5}{6}$; $GH = \frac{7}{8}$; etc. ac quantitates A, B, C, D, E, etc. continuam progreſſionem conſtituant, ſeries illa abit in hanc; $AB + ABCD + ABCDEF +$ etc. quae in hanc formam reducta ſponte interpolatur: erit enim terminus cuius index $\frac{1}{2}$ eſt, $= A$; et terminus indicem $\frac{3}{2}$ habens $= ABC$; et ita porro. Ex quo tota haec interpolatio ad reſolutionem ſingulorum fractionum in binos factores reducitur.

§. 19. Ex lege autem continuitatis erit $BC = \frac{2}{3}$; $DE = \frac{4}{5}$; $FG = \frac{6}{7}$; etc. Cum igitur ſit $A = \frac{1}{2B}$; $B = \frac{2}{3C}$; $C = \frac{3}{4D}$; $D = \frac{4}{5E}$; etc. ſtatim obtinetur $A = \frac{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7}{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6}$ etc. quae autem eſt ipſa formula a Walliſio primum producta, qua circuli quadraturam expreſſit, atque maxime ab expreſſione Brounckeri abhorret. Quare cum iſta formula interpolationem hoc modo inueſtigando tam facile ſe praebeat, eo magis eſt mirandum Brounckerum eadem via ingreſſum ad expreſſionem tantopere differentem perueniſſe; nulla enim via ſupereſſe videtur, quae ad fractionem continuam deduceret. Neque vero exiſtimandum eſt, Brounckerum de induſtria valorem ipſius A per fractionem continuam exprimere voluiſſe; ſed potius methodum quampiam peculiarem ſecutum, quaſi inuitum in eam incidiſſe: cum eo tempore fractiones continuae omnino fuerint incognitae, atque hac occaſione primum in medium prolatae. Ex quibus ſatis colligere licet, obuiam dari methodum ad iſtiusmodi fractiones continuas deducentem, quantumuis ea nunc quidem abſcondita videatur.

§. 20. Quamuis autem diu in hac methodo reperienda irrito conatu ſim verſatus, tamen in alium incidi modum interpolationes huiusmodi ſerierum per fractiones continuas abſoluendi qui mihi autem praebuit expreſſiones a Brounckerianis maxime diuerſas. Interim tamen non ſine omni vtilitate fore ſpero, iſtam methodum exponere, cum eius ope reperiantur fractiones continuae, quarum valores iam aliunde ſint cogniti, et per quadraturas exhiberi queant. Cum enim deinde aliam methodum ſim traditurus valores quarumcunque fractionum continuarum per quadraturas exprimendi, inde egregiae orientur comparationes

tiones formularum integralium, eo ſaltem caſu quo variabili poſt integrationem definitus valor tribuitur, eiusmodi comparationes plures in praecedente diſſertatione de productis ex infinitis factoribus conſtantibus exhibui.

§. 21. Vt igitur hunc a me inuentum interpolandi modum exponam propoſita ſit iſta ſeries latiſſime patens $\frac{p}{p+2q} + \frac{p(p+2r)}{(p+2q)(p+2q+2r)} + \frac{p(p+2r)(p+4r)}{(p+2q)(p+2q+2r)(p+2q+4r)} +$ etc. cuius terminus indicis $\frac{1}{2}$ ſit $= A$; terminus indicis $\frac{3}{2} = ABC$ terminus indicis $\frac{5}{2} = ABCDE$, etc. Hinc igitur erit $AB = \frac{p}{p+2q}$; $CD = \frac{p+2r}{p+2q+2r}$; $EF = \frac{p+4r}{p+2q+4r}$; etc. atque ex lege continuitatis $BC = \frac{p+r}{p+2q+r}$; $DE = \frac{p+3r}{p+2q+3r}$; $FG = \frac{p+5r}{p+2q+5r}$ et ita porro.

§. 22. Ad fractiones tollendas ponatur $A = \frac{a}{p+2q-r}$; $B = \frac{b}{p+2q}$; $C = \frac{c}{p+2q+r}$; $D = \frac{d}{p+2q+2r}$ etc. eritque $ab = (p+2q-r)p$; $bc = (p+2q)(p+r)$; $cd = (p+2q+r)(p+2r)$; $de = (p+2q+2r)(p+3r)$ etc. Fiat nunc $a = m - r + \frac{1}{\alpha}$; $b = m + \frac{1}{\beta}$; $c = m + r + \frac{1}{\gamma}$; $d = m + 2r + \frac{1}{\delta}$; $e = m + 3r + \frac{1}{\varepsilon}$ etc. in quibus ſubſtitutionibus partes integrae conſtituunt progreſſionem arithmeticam, cuius differentia conſtans eſt r, id quod ipſa progreſſio factorum illorum poſtulat. His igitur valoribus ſubſtitutis prodibunt ſequentes aequationes, ponendo breuitatis gratia $p^2 + 2pq - pr - m^2 + mr$
$= P$, et $2r(p+q-m) = Q$.

$$P\alpha\beta - (m-r)\alpha = m\beta + 1$$
$$(P+Q)\beta\gamma - m\beta = (m+r)\gamma + 1$$
$$(P+2Q)\gamma\delta - (m+r)\gamma = (m+2r)\delta + 1$$
$$(P+3Q)\delta\varepsilon - (m+2r)\delta = (m+3r)\varepsilon + 1$$

etc.

§. 23. Ex his igitur aequationibus emergent ſequentes litterarum $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. comparationes inter ſe. $\alpha = \frac{m\beta + 1}{P\beta - (m-r)} = \frac{m}{P} + \cfrac{p(p+2q-r):P^2}{-\frac{(m-r)}{P} + \beta}$, $\beta = \frac{(m+r)\gamma + 1}{(P+Q)\gamma - m} = \frac{m+r}{P+Q} + \cfrac{(p+r)(p+2q):(P+Q)^2}{-\frac{m}{P+Q} + \gamma}$ $\gamma = \frac{(m+2r)\delta + 1}{(P+2Q)\delta - (m+r)} = \frac{m+2r}{P+2Q} + \cfrac{(p+2r)(p+2q+r):(P+2Q)^2}{-\frac{(m+r)}{P+2Q} + \delta}$

Si ergo breuitatis gratia ponatur $p^2 + 2pq - mp - mq + qr = R$ et $pr + qr - mr = S$, atque valores litterarum aſſumtarum continuo in praecedentibus ſurrogentur, proueniet ſequens fractio continua

$$\alpha = \frac{m}{P} + \cfrac{p(p+2q-r):P^2}{\cfrac{2rR}{P(P+Q)} + \cfrac{(p+r)(p+2q):(P+Q)^2}{\cfrac{2r(R+S)}{(P+Q)(P+2Q)} + \cfrac{(p+2r)(p+2q+r):(P+2Q)^2}{\cfrac{2r(R+2S)}{(P+2Q)(P+3Q)} + \text{etc.}}}}$$

§. 24. Cum igitur ſit $a = m - r + \frac{1}{\alpha}$ habebitur

$$a = m - r + \cfrac{P}{m + \cfrac{p(p+2q-r)(P+Q)}{2rR + \cfrac{(p+r)(p+2q)(P+2Q)}{2r(R+S) + \cfrac{(p+2r)(p+2q+r)(P+Q)(P+3Q)}{2r(R+2S) + \text{etc.}}}}}$$

Hinc igitur ſeriei propoſitae $\frac{p}{p+2q} + \frac{p(p+2r)}{(p+2q)(p+2q+2r)} + \frac{p(p+2r)(p+4r)}{(p+2q(p+2q+2r)(p+2q+4r)} +$ etc. terminus cuius index eſt $\frac{1}{2}$ erit $A = \frac{a}{p+2q-r}$. Quoniam vero huius ſeriei terminus generalis indicem habens n eſt $= \frac{\int y^{p+2q-1} dy (1-y^{2r})^{n-1}}{\int y^{p-1} dy (1-y^{2r})^{n-1}}$ erit fractio continua inuenta ſeu valor litterae $a = (p + 2q - r) \frac{\int y^{p+2q-1} dy : \sqrt{(1-y^{2r})}}{\int y^{p-1} dy : \sqrt{(1-y^{2r})}}$ poſito poſt vtramque integrationem $y = 1$.

§. 25.

§. 25. Cum autem in noſtra fractione continua inſit littera arbitraria m, innumerabiles habebuntur fractiones continuae, quarum idem eſt valor isque cognitus: ex quibus praecipuas contemplari iuuabit. Sit igitur primo $m-r=p$ ſeu $m=p+r$, erit $P=2p(q-r)$; $Q=2r(q-r)$; $R=p(q-r)$ et $S=r(p-r)$: vnde fiet

$$a=p+\cfrac{2p(q-r)}{p+r+\cfrac{(p+2q-r)(p+r)}{r+\cfrac{(p+2q)(p+2r)}{r+\cfrac{(p+2q+r)(p+3r)}{r+\text{etc.}}}}}$$

At ſi fuerit $r>q$, ne fractio continua fiat negatiua, erit:

$$a=\cfrac{p}{1+\cfrac{2(r-q)}{p+2q-r+\cfrac{(p+2q-r)(p+r)}{r+\cfrac{(p+2q)(p+2r)}{r+\cfrac{(p+2q+r)(p+3r)}{r+\text{etc.}}}}}}$$

§. 26. Sit nunc $m=p+q$; quo et Q et S euaneſcat; erit autem $P=q(r-q)$ et $R=q(r-q)$, indeque proveniet

$$a=p+q-r+\cfrac{q(r-q)}{p+q+\cfrac{p(p+2q-r)}{2r+\cfrac{(p+r)(p+2q)}{2r+\cfrac{(p+2r)(p+2q+r)}{2r+\text{etc.}}}}}$$

quae fractio continua adeo praecedentibus eſt aequalis, etiamſi ipſae formae ſint diuerſae.

§. 27 Ponatur $m=p+2q$; eritque $P=2q(r-p-2q)=-2q(p+2q-r)$; $Q=-2qr$; $R=-q(p+2q-r)$, et $S=-qr$. Ex his itaque obtinebitur ſequens fractio continua:

$$a=p+2q-r-\cfrac{2q(p+2q-r)}{p+2q+\cfrac{p(p+2q)}{r+\cfrac{(p+r)(p+2q+r)}{r+\cfrac{(p+2r)(p+2q+2r)}{r+\text{etc.}}}}}$$

Ita innumerabiles prodeunt fractiones continuae quarum omnium idem eſt valor a, qui per formulas integrales inuentus eſt $= (p+2q-r)\dfrac{\int y^{p+2q-1}dy : \sqrt{(1-y^{2r})}}{\int y^{p-1}dy : \sqrt{(1-y^{2r})}}$

$$= \frac{(p+2q-2r)\int y^{p+2q-2r-1}dy : \sqrt{(1-y^{2r})}}{\int y^{p-1}\,dy : \sqrt{(1-y^{2r})}}.$$

§. 28. Antequam vlterius progrediamur caſus nonnullos contemplemur. Sit igitur $r = 2q$; eritque $a = p\dfrac{\int y^{p+2q-1}dy : \sqrt{(1-y^{4q})}}{\int y^{p-1}dy : \sqrt{(1-y^{4q})}}$. Cum ergo fiat $P = p^2 + mq - m^2$; $Q = 4q(p+q-m)$; $R = p^2 + 2pq + 2qq - mp - mq$, et $S = 2q(p+q-m)$, erit in genere

$$a = m - 2q + \cfrac{P}{m + \cfrac{p^2(P+Q)}{4qR + \cfrac{(p+2q)^2 P(P+2Q)}{4q(R+S) + \cfrac{(p+4q)^2(P+2Q)(P+3Q)}{4q(R+2S) + \text{etc.}}}}}$$

§. 29. Si autem pro m varios illos valores ſubſtituamus, prodibunt ſequentes fractiones continuae determinatae.

$$a = p - \cfrac{2pq}{p + 2q + \cfrac{p(p+2q)}{2q + \cfrac{(p+2q)(p+4q)}{2q + \cfrac{(p+4q)(p+6q)}{2q + \text{etc.}}}}}$$

Siue loco huius fractionis continuae ob $r > q$

$$a = \cfrac{p}{1 + \cfrac{2q}{p + \cfrac{p(p+2q)}{2q + \cfrac{(p+2q)(p+4q)}{2q + \cfrac{(p+4q)(p+6q)}{2q + \text{etc.}}}}}}$$

Deinde ex §. 26. obtinetur pro hoc caſu iſta fractio

$$a = p - q + \cfrac{qq}{p + q + \cfrac{pp}{4q + \cfrac{(p+2q)^2}{4q + \cfrac{(p+4q)^2}{4q + \text{etc.}}}}}$$

Tertio

Tertio vero §. 27. ſuppeditabit hanc fractionem continuam:

$$a = p - \cfrac{2pq}{p + 2q + \cfrac{p(p+2q)}{2q + \cfrac{(p+2q)(p+4q)}{2q + \cfrac{(p+4q)(p+6q)}{2q + \cfrac{(p+6q)(p+8q)}{2q + \text{etc.}}}}}}$$

quae cum primo hic exhibita congruit: ita vt duae tantum fractiones continuae ſimpliciores pro hoc caſu, quo $r = 2q$, habeantur.

§. 30. Ponatur nunc porro $q = p = 1$, vt fiat $a = \frac{\int yydy : \sqrt{(1-y^4)}}{\int dy : \sqrt{(1-y^4)}}$; erit primo:

$$a = 1 - \cfrac{2}{3 + \cfrac{1 \cdot 3}{2 + \cfrac{3 \cdot 5}{2 + \cfrac{5 \cdot 7}{2 + \text{etc.}}}}}$$

Deinde vero habebitur:

$$a = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{9}{4 + \cfrac{25}{4 + \cfrac{49}{4 + \text{etc.}}}}}}$$

Vnde ſequitur fore $- \frac{\int dy : \sqrt{(1-y^4)}}{\int yydy : \sqrt{(1-y^4)}} =$

$$2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{9}{4 + \cfrac{25}{4 + \cfrac{49}{4 + \text{etc.}}}}}$$

qui caſus continetur in expreſſione §. 16. data ex quo illa formula nondum ſatis demonſtrata magis confirmatur. Poſito enim ibi $a = 3$, fiet $3 \frac{\int x^4 dx : \sqrt{(1-x^4)}}{\int xxdx : \sqrt{(1-x^4)}} - \frac{\int dx : \sqrt{(1-x^4)}}{\int xxdx : \sqrt{(1-x^4)}}$

$$= 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{9}{4 + \cfrac{25}{4 + \cfrac{49}{4 + \text{etc.}}}}}$$

ita vt nunc quidem conſtet formulam illam §. 16. exhibitam

bitam veram eſſe caſibus quibus eſt tum $a = 2$ tum etiam $a = 3$: mox autem eius veritas in latiſſimo ſenſu euincetur.

§. 31. Sit $q = \frac{1}{2}$ et $p = 1$; manente $r = 2q = 1$ erit $a = \frac{\int y\,dy:\sqrt{(1-y^2)}}{\int dy:\sqrt{(1-y^2)}} = \frac{2}{\pi}$ denotante π peripheriam circuli cuius diameter eſt $= 1$. Generaliter itaque erit $P = 1 + m - m^2$; $Q = 3 - 2m$; $R = \frac{5-3m}{2}$ et $S = \frac{3-2m}{2}$, ideoque

$$a = m - 1 + \cfrac{1+m-m^2}{m+\cfrac{1^2(4-m-m^2)}{5-3m+\cfrac{2^2(1+m-m^2)(1-3m-m^2)}{8-5m+\cfrac{3^2(4-m-m^2)(10-5m-m^2)}{11-7m+\text{etc.}}}}}$$

In caſibus autem ſpecialibus expoſitis erit

$$\frac{\pi}{2} = \cfrac{1}{1-\cfrac{1}{2+\cfrac{1\cdot 2}{1+\cfrac{2.3}{1+\cfrac{3\cdot 4}{1+\text{etc.}}}}}} = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1\cdot 2}{1+\cfrac{2\cdot 3}{1+\cfrac{3.4}{1+\text{etc.}}}}}$$

$$\text{et } \frac{\pi}{2} = \cfrac{1}{\frac{1}{2}+\cfrac{1:4}{\frac{3}{2}+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{2^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\text{etc.}}}}}} = 2 - \cfrac{1}{2+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{2^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\text{etc.}}}}}$$

§. 32. Vt vſus harum formularum in interpolationibus intelligatur, propoſita ſit haec ſeries: $\frac{2}{1} + \frac{2\cdot 4}{1\cdot 3} + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{1\cdot 3\cdot 5} +$ etc. cuius terminum indicis $\frac{1}{2}$ inueniri oporteat, qui ſit $=$ A; Erit ergo $p = 2$; $r = 1$; et $q = -\frac{1}{2}$. Ponatur $A = \frac{a}{p+2q-r}$ et $A = \frac{a}{0}$, vnde incommodum datarum formularum, ſi fiat $p + 2q - r = 0$ ſatis intelligitur. Interim tamen negotium hoc abſolui poteſt quaerendo terminum indicis $\frac{3}{2}$, qui ſi fuerit $= Z$ erit $A = \frac{2}{3} Z$; At $\frac{1}{2} Z$ erit terminus indicis $\frac{1}{2}$ huius ſeriei $\frac{4}{3} + \frac{4\cdot 6}{3\cdot 5} + \frac{4\cdot 6.8}{3.5\cdot 7} +$ etc. quae cum generali comparata dat $p = 4$; $r = 1$; $q = -\frac{1}{2}$. ita vt fiat Z

=

$= \frac{2\int y^2 dy \cdot \surd(1-y^2)}{\int y^3 dy : \surd(1-y^2)} = \frac{2\int dy : \surd(1-y^2)}{2\int y dy : \surd(1-y^3)} = \frac{3}{4}\pi$. atque $A = \frac{\pi}{2}$. Cum igitur ſit per §. 24. $Z = a$; et $A = \frac{2}{3}Z = \frac{2}{3}a$, erit primo generaliter ob $P = 8 + m - m^2$; $Q = 7 - 2m$; $R = \frac{23-7m}{2}$; et $S = \frac{7-2m}{2}$; $A = \frac{2}{3}a = \frac{\pi}{2} = \frac{2(m-1)}{3}$

$$+ \cfrac{2(8+m-m^2)}{3m + \cfrac{2\cdot4\cdot3(15-m-m^2)}{23-7m + \cfrac{3\cdot5(8+m-m^2)(22-3m-m^2)}{30-9m + \cfrac{4\cdot6(15-m-m^2)(25-5m-m^2)}{37-11m + \text{etc.}}}}}$$

§. 33. Caſibus autem particularibus euoluendis erit $a = \frac{3}{4}\pi =$

$$4 - \cfrac{12}{5 + \cfrac{2\cdot5}{1 + \cfrac{3\cdot6}{1 + \cfrac{4\cdot7}{1 + \text{etc.}}}}} = \cfrac{4}{1 + \cfrac{3}{2 + \cfrac{2\cdot5}{1 + \cfrac{3\cdot6}{1 + \cfrac{4\cdot7}{1 + \text{etc.}}}}}}$$

vel etiam $\frac{3}{4}\pi = 1 + \cfrac{3}{1 + \cfrac{1\cdot4}{1 + \cfrac{2\cdot5}{1 + \cfrac{3\cdot6}{1 + \cfrac{4\cdot7}{1 + \text{etc.}}}}}}$

Simili modo per §. 26. habebitur $a = \frac{3}{4}\pi$

$$= \frac{5}{2} - \cfrac{3\cdot4}{\frac{7}{2} + \cfrac{2\cdot4}{2 + \cfrac{3\cdot5}{2 + \cfrac{4\cdot6}{2 + \cfrac{5\cdot7}{2 + \text{etc.}}}}}} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1\cdot3}{2 + \cfrac{2\cdot4}{2 + \cfrac{3\cdot5}{2 + \cfrac{4\cdot6}{2 + \text{etc.}}}}}}$$

Denique caſus §. 27. expoſitus dabit $a = \frac{3}{4}\pi =$

$$2 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{3\cdot4}{1 + \cfrac{4\cdot5}{1 + \cfrac{5\cdot6}{1 + \text{etc.}}}}}$$ ſeu $$\frac{\pi}{2} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1\cdot2}{1 + \cfrac{2\cdot3}{1 + \cfrac{3\cdot4}{1 + \cfrac{4\cdot5}{1 + \text{etc.}}}}}}$$

quae expreſſio conuenit cum ſuperiore quodam in §. 31. exhibita.

§. 34. Ex hac itaque interpolandi methodo innumerabiles conſecuti ſumus fractiones continuas, quarum valores per quadraturas curuarum ſeu formulas integrales aſſignari poſſint. Cum autem iſtae fractiones continuae in initio ſint irregulares initia quae anomaliam continent reſecentur, vt habeantur fractiones continuae vbiquae eadem lege procedentes. Ita ex §. 25, ponendo $p+2q-r=f$ et $p+r=b$; prodibit ſequens aequatio:

$$r+\cfrac{fb}{r+\cfrac{(f+r)(b+r)}{r+\cfrac{(f+2r)(b+2r)}{r+\text{etc.}}}}=\frac{b(f-r)\int y^{b+r-1}dy:\sqrt{(1-y^{2r})}-f(b-r)\int y^{f+r-1}dy:\sqrt{(1-y^{2r})}}{f\int y^{f+r-1}dy:\sqrt{(1-y^{2r})}-b\int y^{b+r-1}dy:\sqrt{(1-y^{2r})}}$$

quae aequatio ſemper eſt realis, niſi fiat $f=b$. At caſu quo $f=b$ ponatur $f=b+dw$, reperieturque

$$\frac{\int y^{b+r+dw-1}dy:\sqrt{(1-y^{2r})}}{\int y^{b+r-1}dy:\sqrt{(1-y^{2r})}}=1-r\,dw\int\frac{dx}{x^{r+1}}\int\frac{x^{b+2r-1}dx}{1+x^{2r}}$$

poſito poſt integrationem $x=1$. Hinc ergo erit

$$r+\cfrac{bb}{r+\cfrac{(b+r)^2}{r+\cfrac{(b+2r)^2}{r+\text{etc}}}}=\frac{r+br(b-r)\int\frac{dx}{x^{r+1}}\int\frac{x^{b+2r-1}dx}{1-x^{2r}}}{1-br\int\frac{dx}{x^{r+1}}\int\frac{x^{b+2r-1}dx}{1-x^{2r}}}$$

$$=\frac{r(b-r)^2\int\frac{dx}{x^{r+1}}\int\frac{x^{b-1}dx}{1-x^{2r}}}{1-r(b-r)\int\frac{dx}{x^{r+1}}\int\frac{x^{b-1}dx}{1-x^{2r}}}.$$

Verum ex natura integralium eſt $\int\frac{dx}{x^{r+1}}\int\frac{x^{b+2r-1}dx}{1-x^{2r}}=\frac{-1}{rx^r}\int\frac{x^{b+2r-1}dx}{1-x^{2r}}+\frac{1}{r}\int\frac{x^{b+r-1}dx}{1-x^{2r}}+\frac{1}{r}\int\frac{x^{b+r-1}dx}{1+x^r}$ poſito $x=1$. Quo circa habebitur

$r+$

$$r+\cfrac{hh}{r+\cfrac{(h+r)^2}{r+etc.}}=\frac{r+h(h-r)\int\frac{x^{h+r-1}dx}{1+x^r}}{1-h\int\frac{x^{h+r-1}dx}{1+x^r}}=$$

$$\frac{1-(h-r)\int\frac{x^{h-1}dx}{1+x^r}}{\int\frac{x^{h-1}dx}{1+x^r}}$$; quae forma autem congruit cum ea, quae §. 7. eſt data.

§. 35. Simili modo ex §. 26. ponendo $p=f$ et $p+2q-r=h$, ſequitur fore

$$2r+\cfrac{fh}{2r+\cfrac{(f+r)(h+r)}{2r+\cfrac{(f+2r)(h+2r)}{2r+etc.}}}=\frac{2(r-f)(r-h)\int\frac{y^{f-1}dy}{\sqrt{(1-y^{2r})}}-h(f+h-3r)\int\frac{y^{h+r-1}dy}{\sqrt{(1-y^{2r})}}}{2h\int\frac{y^{h+r-1}dy}{\sqrt{(1-y^{2r})}}-(f+h-r)\int\frac{y^{f-1}dy}{\sqrt{(1-y^{2r})}}}.$$

Quoniam autem formula manet immutata ſi f et h inter ſe commutentur, manifeſtum eſt eſſe debere

$$\frac{h\int y^{h+r-1}dy:\sqrt{(1-y^{2r})}}{\int y^{f-1}dy:\sqrt{(1-y^{2r})}}=\frac{f\int y^{f+r-1}dy:\sqrt{(1-y^{2r})}}{\int y^{h-1}dy.\sqrt{(1-y^{2r})}}$$, poſito poſt omnes integrationes $y=1$. Hoc vero theorema iam continetur in iis, quae in praecedente diſſertatione de productis ex infinitis factoribus conſtantibus exhibui; ibi enim plura huius generis theoremata produxi ac demonſtraui.

§. 36. Hic autem pari modo caſus notari meretur, quo eſt $f=h+r$, hoc enim tam numerator quam denominator fractionis inuentae euaneſcit. Poſito autem vt ante $f=h+r+d\omega$ et calculo ſubducto orietur

 2r +

$$2r+\cfrac{b(b+r)}{2r+\cfrac{(b+r)(b+2r)}{2r+\cfrac{(b+2r)(b+3r)}{2r+etc.}}} = \frac{b+2b(r-b)\int\frac{x^{b-r}dx}{1+x^r}}{-1+2b\int\frac{x^{b-r}dx}{1+x^r}}$$

Quare ſi ponatur $b=r=1$; habebitur

$$2+\cfrac{1\cdot 2}{2+\cfrac{2\cdot 3}{2+\cfrac{3\cdot 4}{2+\cfrac{4\cdot 5}{2+etc.}}}} = \frac{1}{2l2-1}$$

Ceterum ſi aequatio §. 27. eodem modo tractetur, prodibit forma illi ipſi, quam ex §. 25. elicui, omnino ſimilis.

§. 37. His expoſitis, quibus interpolatio ſerierum ad fractiones continuas reducitur, reuertor ad expreſſiones Brounckerianas, atque methodum tradam genuinam non ſolum ad eas perueniendi, ſed etiam eiusmodi, quae videatur ab ipſo Brounckero eſſe vſurpata. Maxime autem diſcrepant fractiones continuae hactenus inuentae a Brounckerianis, cum valores litterarum A, B, C, D, etc. methodo expoſita ita a ſe inuicem pendeant, vt inter ſe comparari facile queant, methodo Brounckeri autem inter ſe diuerſi prodierint, vt eorum mutua relatio non perſpiciatur. Quod ipſum diſcrimen me tandem ad inuentionem alterius methodi nunc aperiendae manuduxit.

§. 38. Antequam autem ipſum interpolandi modum exponam, ſequens lemma latiſſime patens praemitti conveniet. Si fuerint innumerabiles quantitates α, β, γ, δ, ε, etc. quae ita a ſe inuicem pendeant vt ſit:

$$\alpha\beta - m\alpha - n\beta - \varkappa = 0$$
$$\beta\gamma - (m+s)\beta - (n+s)\gamma - \varkappa = 0$$

$\gamma\,\delta$

$$\gamma\delta-(m+2s)\gamma-(n+2s)\delta-\varkappa=0$$
$$\delta\varepsilon-(m+3s)\delta-(n+3s)\varepsilon-\varkappa=0$$
etc.

ac tribuantur litteris α, β, γ, δ, etc. ſequentes valores:

$$\alpha=m+n-s+\frac{ss-ms+ns+\varkappa}{a}$$
$$\beta=m+n+s+\frac{ss-ms+ns+\varkappa}{b}$$
$$\gamma=m+n+3s+\frac{ss-ms+ns+\varkappa}{c}$$
$$\delta=m+n+5s+\frac{ss-ms+ns+\varkappa}{d}$$
etc.

ſuperiores aequationes transformabuntur in ſequentes ſimiles:

$$ab-(m-s)a-(n+s)b-ss+ms-ns-\varkappa=0$$
$$bc-mb-(n+2s)c-ss+ms-ns-\varkappa=0$$
$$cd-(m+s)c-(n+3s)d-ss+ms-ns-\varkappa=0$$
$$de-(m+2s)d-(n+4s)e-ss+ms-ns-\varkappa=0$$
etc.

Atque ex hoc ipſo vt iſtiusmodi formae ſimiles prodeant, ſubſtitutiones illae ſunt ortae.

§. 39. Si nunc ſimili modo hae vltimae aequationes ope idonearum ſubſtitutionum in ſui ſimiles transmutentur, reperientur loco a, b, c, d, etc. ſequentes ſubſtitutiones

$$a=m+n-s+\frac{4ss-2ms+2ns+\varkappa}{a1}$$
$$b=m+n+s+\frac{4ss-2ms+2ns+\varkappa}{b1}$$
$$c=m+n+3s+\frac{4ss-2ms+2ns+\varkappa}{c1}$$
$$d=m+n+5s+\frac{4ss-2ms+2ns+\varkappa}{d1}$$
etc.

quibus factis ſequentes prouenient aequationes:

$$a1\,b1-(m-2s)a1-(n+2s)b1-4ss+2ms-2ns-\varkappa=0$$
$$b1\,c1-(m-s)b1-(n+3s)c1-4ss+2ms-2ns-\varkappa=0$$

$$c1\,d1 - m\,c1 - (n+4s)\,d1 - 4ss + 2ms - 2ns - \varkappa = 0$$

$$d1\,e1 - (m+s)\,d1 - (n+5s)\,e1 - 4ss + 2ms - 2ns - \varkappa = 0$$

etc.

§ 40. Vlterius igitur pergendo poni debebit:

$$a1 = m + n - s + \frac{9ss - 3ms + 3ns + \varkappa}{a2}$$

$$b1 = m + n + s + \frac{9ss - 3ms + 3ns + \varkappa}{b2}$$

$$c1 = m + n + 3s + \frac{9ss - 3ms + 3ns + \varkappa}{c2}.$$

etc.

Atque ex his ſubſtitutionibus emergent hae aequationes:

$$a2\,b2 - (m-3s)\,a2 - (n+3s)\,b2 - 9ss + 3ms - 3ns - \varkappa = 0$$

$$b2\,c2 - (m-2s)\,b2 - (n+4s)\,c2 - 9ss + 3ms - 3ns - \varkappa = 0$$

$$c2\,d2 - (m-s)\,c2 - (n+5s)\,d2 - 9ss + 3ms - 3ns - \varkappa = 0$$

etc.

§. 41. Si nunc hae ſubſtitutiones continuentur in infinitum, atque perpetuo ſequentes valores in praecedentibus ſubſtituantur, litterarum α, β, γ, δ, etc. valores exprimentur fractionibus continuis ſequentibus:

$$\alpha = m + n - s + \cfrac{ss - ms + ns + \varkappa}{m + n - s + \cfrac{4ss - 2ms + 2ns + \varkappa}{m + n - s + \cfrac{9ss - 3ms + 3ns + \varkappa}{m + n - s + \cfrac{16ss - 4ms + 4ns + \varkappa}{m + n + s + \text{etc.}}}}}$$

$$\beta = m + n + s + \cfrac{ss - ms + ns + \varkappa}{m + n + s + \cfrac{4ss - 2ms + 2ns + \varkappa}{m + n + s + \cfrac{9ss - 3ms + 3ns + \varkappa}{m + n + s + \cfrac{16ss - 4ms + 4ns + \varkappa}{m + n + s + \text{etc.}}}}}$$

$$\gamma = m + n + 3s + \cfrac{ss - ms + ns + \varkappa}{m + n + 3s + \cfrac{4ss - 2ms + 2ns + \varkappa}{m + n + 3s + \cfrac{9ss - 3ms + 3ns + \varkappa}{m + n + 3s + \text{etc.}}}}$$

quae fractiones continuae ſatis ſunt ſimiles iis, quas Brounckerus dedit, cum ſequentes in praecedentibus non contineantur.

§. 42.

§. 42. Quo autem vſus harum formularum in interpolationibus pateat, propoſita ſit haec ſeries: $\frac{p}{p+2q} + \frac{p(p+2r)}{(p+2q)(p+2q+2r)} + \frac{p(p+2r)(p+4r)}{(p+2q)(p+2q+2r)(p+2q+4r)} +$ etc. cuius terminus indicis $\frac{1}{2}$ ſit $=$ A; terminus indicis $\frac{3}{2} =$ ABC; terminus indicis $\frac{5}{2} =$ ABCDE; et ita porro. His poſitis erit $AB = \frac{p}{p+2q}$; $CD = \frac{p+2r}{p+2q+2r}$; $EF = \frac{p+4r}{p+2q+4r}$; etc. Ponatur nunc $A = \frac{a}{p+2q-r}$; $B = \frac{b}{p+2q}$; $C = \frac{c}{p+2q+r}$; $D = \frac{d}{p+2q+2r}$; etc. eritque $ab = p(p+2q-r)$; $bc = (p+r)(p+2q)$; $cd = (p+2r)(p+2q+r)$; $de = (p+3r)(p+2q+2r)$; etc. Iam fiat vlterius $a = p+q-r+\frac{g}{\alpha}$; $b = p+q+\frac{g}{\beta}$; $c = p+q+r+\frac{g}{\gamma}$; $d = p+q+2r+\frac{g}{\delta}$; etc. quibus valoribus ſubſtitutis emergent ſequentes aequationes, facto $g = q(r-q)$:

$$\alpha\beta-(p+q-r)\alpha-(p+q)\beta-q(r-q)=0$$
$$\beta\gamma-(p+q)\beta-(p+q+r)\gamma-q(r-q)=0$$
$$\gamma\delta-(p+q+r)\gamma-(p+q+2r)\delta-q(r-q)=0$$
$$\delta\varepsilon-(p+q+2r)\delta-(p+q+3r)\varepsilon-q(r-q)=0$$

etc.

§. 43. Comparatis his aequationibus cum iis, quas §. 38. aſſumſimus, reperietur:

$m = p+q-r$; $n = p+q$; $\varkappa = qr-qq$; et $s = r$ vnde fiet $ss-ms+ns+\varkappa = 2rr+qr-qq$; $4ss-2ms+2ns+\varkappa = 6rr+qr-qq$; $9ss-3ms+3ns+\varkappa = 12rr+qr-qq$; etc. Quibus valoribus omnibus ſubſtitutis obtinebuntur ſequentes fractiones continuae, quibus litterae a, b, c, d, etc. exprimentur.

$$a = p+q-r+\cfrac{qr-qq}{2(p+q-r)+\cfrac{2rr+qr-qq}{2(p+q-r)+\cfrac{6rr+qr-qq}{2(p+q-r)+\cfrac{12rr+qr-qq}{2(p+q-r)+\text{etc.}}}}}$$

$b =$

$$b = p+q+\cfrac{qr-qq}{2(p+q)+\cfrac{2rr+qr-qq}{2(p+q)+\cfrac{6rr+qr-qq}{2(p+q)+\cfrac{12rr+qr-qq}{2(p+q)+\text{etc.}}}}}$$

$$c = p+q+r+\cfrac{qr-qq}{2(p+q+r)+\cfrac{2rr+qr-qq}{2(p+q+r)+\cfrac{6rr+qr-qq}{2(p+q+r)+\cfrac{12rr+qr-qq}{2(p+q+r)+\text{etc.}}}}}$$

etc.

§. 44. Cum autem ſeriei propoſitae terminus qui indicem habet n ſit $= \frac{\int y^{p+2q-1}dy(1-y^{2r})^{n-1}}{\int y^{p-1}dy(1-y^{2r})^{n-1}}$; erit $A = \frac{a}{p+2q-r} = \frac{\int y^{p+2q-1}dy:\sqrt{(1-y^{2r})}}{\int y^{p-1}dy:\sqrt{(1-y^{2r})}}$; ſeu $a = (p+2q-r)\frac{\int y^{p+2q-1}dy:\sqrt{(1-y^{2r})}}{\int y^{p-1}dy:\sqrt{(1-y^{2r})}}$. Deinde ob $ab = p(p+2q-r)$ erit $b = \frac{p\int y^{p-1}dy:\sqrt{(1-y^{2r})}}{\int y^{p+2q-1}dy:\sqrt{(1-y^{2r})}}$. Quoniam autem eſt per theorema in praecedente diſſertatione expoſitum $\frac{p\int y^{p-1}dy:\sqrt{(1-y^{2r})}}{\int y^{f+r-1}dy:\sqrt{(1-y^{2r})}} = \frac{f\int y^{f-1}dy:\sqrt{(1-y^{2r})}}{\int y^{p+r-1}dy:\sqrt{(1-y^{2r})}} = \frac{(f+r)\int y^{f+2r-1}dy:\sqrt{(1-y^{2r})}}{\int y^{p+r-1}dy:\sqrt{(1-y^{2r})}}$ ponatur $f = p+2q-r$; quo facto erit $b = \frac{(p+2q)\int y^{p+2q+r-1}dy:\sqrt{(1-y^{2r})}}{\int y^{p+r-1}dy:\sqrt{(1-y^{2r})}}$. Simili vero modo progrediendo erit $c = \frac{(p+2q+r)\int y^{p+2q+2r-1}dy:\sqrt{(1-y^{2r})}}{\int y^{p+2r-1}dy:\sqrt{(1-y^{2r})}}$ et $d = \frac{(p+2q+2r)\int y^{p+2q+3r-1}dy:\sqrt{(1-y^{2r})}}{\int y^{p+3r-1}dy:\sqrt{(1-y^{2r})}}$ etc.

§. 45.

§. 45. Cum igitur lex progreſſionis harum formularum integralium conſtet, colligetur huius fractionis continuae generalis

$$p+q+mr+\cfrac{qr-qq}{2(p+q+mr)+\cfrac{2rr+qr-qq}{2(p+q+mr)+\cfrac{6rr+qr-qq}{2(p+q+mr)+\text{etc.}}}}$$

valor eſſe $= (p+2q+mr)\dfrac{\int y^{p+2q+(m+1)r-1}dy:\sqrt{(1-y^{2r})}}{\int y^{p+(m+1)r-1}dy:\sqrt{(1-y^{2r})}}$.

Quare ſi ponatur $p+q+mr=s$, ita vt ſit $p=s-q-mr$, proueniet ſequens fractio continua:

$$s+\cfrac{qr-qq}{2s+\cfrac{2rr+qr-qq}{2s+\cfrac{6rr+qr-qq}{2s+\cfrac{12rr+qr-qq}{2s+\cfrac{20rr+qr-qq}{2s+\text{etc.}}}}}}$$

cuius propterea valor erit iſta expreſſio

$$(q+s)\frac{\int y^{q+r+s-1}dy:\sqrt{(1-y^{2r})}}{\int y^{r+s-q-1}dy:\sqrt{(1-y^{2r})}}.$$

§. 46. Simili modo cum huius fractionis continuae

$$s+r+\cfrac{qr-qq}{2(s+r)+\cfrac{2rr+qr-qq}{2(s+r)+\cfrac{6rr+qr-qq}{2(s+r)+\text{etc.}}}}$$

valor ſit $= (q+r+s)\dfrac{\int y^{s+2r+q-1}dy:\sqrt{(1-y^{2r})}}{\int y^{s+2r-q-1}dy:\sqrt{(1-y^{2r})}}$.

Harum duarum itaque fractionum continuarum productum erit $=(s+q)(s+r-q)$ quemadmodum productum formularum integralium declarat. Eſt enim per theorema in praecedente diſſertatione datum:

$$\frac{f}{a}=\frac{\int x^{a-1}dx:\sqrt{(1-x^{2r})}\,.\int x^{a+r-1}dx:\sqrt{(1-x^{2r})}}{\int x^{f-1}dx:\sqrt{(1-x^{2r})}\,.\int x^{f+r-1}dx:\sqrt{(1-x^{2r})}}$$ ad quam

 for-

formam productum formularum integralium ſponte reducitur.

§. 47. Fractio continua inuenta in aliam commodiorem formam poteſt transmutari eo quod ſinguli numeratores in factores reſolui poſſunt: ita habebitur iſta fractio continua

$$s+\cfrac{q(r-q)}{2s+\cfrac{(r+q)(2r-q)}{2s+\cfrac{(2r+q)(3r-q)}{2s+\cfrac{(3r+q)(4r-q)}{2s+\text{etc.}}}}}$$

cuius adeo valor erit $=(q+s)\dfrac{\int y^{r+s+q-1}dy:\sqrt{(1-y^{2r})}}{\int y^{r+s-q-1}dy:\sqrt{(1-y^{2r})}}$

Quocirca ſi ad fractionem continuam addatur s vt vbique eadem ſit progreſſionis lex, erit

$$\frac{(q+s)\int y^{r+s+q-1}dy:\sqrt{(1-y^{2r})}+s\int y^{r+s-q-1}dy:\sqrt{(1-y^{2r})}}{\int y^{r+s-q-1}dy:\sqrt{(1-y^{2r})}}$$

$$=2s+\cfrac{q(r-q)}{2s+\cfrac{(r+q)(2r-q)}{2s+\cfrac{(2r+q)(3r-q)}{2s+\cfrac{(3r+q)(4r-q)}{2s+\text{etc.}}}}}$$

§. 48. Si nunc ponatur $r=2$ et $q=1$, prodibunt coniunctim omnes fractiones continuae a Brounckero exhibitae, quae omnes continebuntur in hac fractione continua:

$$s+\cfrac{1}{2s+\cfrac{9}{2s+\cfrac{25}{2s+\cfrac{49}{2s+\cfrac{81}{2s+\text{etc.}}}}}}$$

cuius propterea valor erit $=(s+1)\dfrac{\int y^{s+2}dy:\sqrt{(1-y^{4})}}{\int y^{s}dy:\sqrt{(1-y^{4})}}$

quae expreſſio apprime congruit cum ea, quam ſupra, ante-

antequam veritas omnino conſtaret, aſſignauimus, vide §. 16.

§. 49. Cum igitur hactenus plurimas dederim fractiones continuas, quarum valores per formulas integrales aſſignari poſſunt, methodum nunc directam exponam, cuius ope ex formulis integralibus viciſſim ad fractiones continuas peruenire liceat. Nititur autem haec methodus reductione vnius formulae integralis ad duas alias, quae reductio non multum diſſimilis eſt illi ſolitae, qua formulae cuiusdam differentialis integratio ad integrationem alius reducitur. Sint igitur huiusmodi formulae integrales infinitae $\int P dx$; $\int PR dx$; $\int PR^2 dx$; $\int PR^3 dx$; $\int PR^4 dx$ etc. quae ita ſint comparatae, vt ſi ſingulae ita integrentur, vt euaneſcant poſito $x = 0$, tumque ponatur $x = 1$ ſit vt ſequitur:

$$a\int P dx = b\int PR dx + c\int PR^2 dx$$
$$(a+\alpha)\int PR dx = (b+\beta)\int PR^2 dx + (c+\gamma)\int PR^3 dx$$
$$(a+2\alpha)\int PR^2 dx = (b+2\beta)\int PR^3 dx + (c+2\gamma)\int PR^4 dx$$
$$(a+3\alpha)\int PR^3 dx = (b+3\beta)\int PR^4 dx + (c+3\gamma)\int PR^5 dx$$

et generaliter

$$(a+n\alpha)\int PR^n dx = (b+n\beta)\int PR^{n+1} dx + (c+n\gamma)\int PR^{n+2} dx$$

§. 50. Si igitur huiusmodi habeantur formulae integrales, facili negotio ex iis fractiones continuae formabuntur. Cum enim ſit

$$\frac{\int P dx}{\int PR dx} = \frac{b}{a} + \frac{c\int PR^2 dx}{a\int PR dx}$$
$$\frac{\int PR dx}{\int PR^2 dx} = \frac{b+\beta}{a+\alpha} + \frac{(c+\gamma)\int PR^3 dx}{(a+\alpha)\int PR^2 dx}$$
$$\frac{\int PR^2 dx}{\int PR^3 dx} = \frac{b+2\beta}{a+2\alpha} + \frac{(c+2\gamma)\int PR^4 dx}{(a+2\alpha)\int PR^3 dx}$$
$$\frac{\int PR^3 dx}{\int PR^4 dx} = \frac{b+3\beta}{a+3\alpha} + \frac{(c+3\gamma)\int PR^5 dx}{(a+3\alpha)\int PR^4 dx}$$

etc.

 erit

erit ſubſtituendo quemque valorem in praecedente aequatione

$$\frac{\int P dx}{\int PR dx} = \frac{b}{a} + \cfrac{c:a}{\cfrac{b+\beta}{a+2\alpha} + \cfrac{(c+\gamma):(a+\alpha)}{\cfrac{b+2\beta}{a+2\alpha} + \cfrac{(c+2\gamma).(a+2\alpha)}{\cfrac{b+\ \beta}{a+3\alpha} + \cfrac{(c+3\gamma):(a+3\alpha)}{\cfrac{b+\ \beta}{a+\ \alpha} + \text{etc.}}}}}$$

Haec vero expreſſio inuerſa et a fractionibus partialibus liberata abit in hanc:

$$\frac{\int PR dx}{\int P dx} = \cfrac{a}{b+\cfrac{(a+\alpha)c}{b+\beta+\cfrac{(a+2\alpha)(c+\gamma)}{b+2\beta+\cfrac{(a+3\alpha)(c+2\gamma)}{b+3\beta+\cfrac{(a+4\alpha)(c+3\gamma)}{b+4\beta+\text{etc.}}}}}}$$

§. 51. Si fuerit etiam deſignante n numerum negatiuum $(a+n\alpha)\int PR^n dx = (b+n\beta)\int PR^{n+1} dx + (c+n\gamma)\int PR^{n+2} dx$, ſequentes habebuntur aequationes.

$$(a-\alpha)\int \tfrac{Pdx}{R} = (b-\beta)\int P dx + (c-\gamma)\int PR dx$$
$$(a-2\alpha)\int \tfrac{Pdx}{R^2} = (b-2\beta)\int \tfrac{Pdx}{R} + (c-2\gamma)\int P dx$$
$$(a-3\alpha)\int \tfrac{Pdx}{R^3} = (b-3\beta)\int \tfrac{Pdx}{R^2} + (c-3\gamma)\int \tfrac{Pdx}{R}$$
$$(a-4\alpha)\int \tfrac{Pdx}{R^4} = (b-4\beta)\int \tfrac{Pdx}{R^3} + (c-4\gamma)\int \tfrac{Pdx}{R^2}$$

etc.

Hinc igitur pari modo conficietur:

$$\frac{\int PR dx}{\int P dx} = \frac{-(b-\beta)}{c-\gamma} + \frac{(a-\alpha)\int P dx : R}{(c-\gamma)\int P dx}$$
$$\frac{\int P dx}{\int P dx : R} = \frac{-(b-2\beta)}{c-2\gamma} + \frac{(a-2\alpha)\int P dx : R^2}{(c-2\gamma\int P dx : R}$$
$$\frac{\int P dx : R}{\int P dx : R^2)} = \frac{-(b-3\beta)}{c-3\gamma} + \frac{(a-3\alpha)\int P dx : R^3}{(c-3\gamma)\int P dx : R^2}$$

etc.

Ex his autem aequationibus producetur

$\frac{\int PR dx}{\int P dx}$

$$\frac{\int PRdx}{\int Pdx} = \frac{-(b-\beta)}{c-\gamma} + \cfrac{(a-\alpha)(c-\gamma)}{\cfrac{-(b-2\beta)}{c-2\gamma} + \cfrac{(a-2\alpha)(c-2\gamma)}{\cfrac{-(b-3\beta)}{c-3\gamma} + \cfrac{(a-3\alpha)(c-3\gamma)}{\cfrac{-(b-4\beta)}{c-4\gamma} + \text{etc.}}}}$$

ſiue fractionibus partialibus ſublatis

$$\frac{(c-\gamma)\int PRdx}{\int Pdx} = -(b-\beta) + \cfrac{(a-\alpha)(c-2\gamma)}{-(b-2\beta) + \cfrac{(a-2\alpha)(c-3\gamma)}{-(b-3\beta) + \cfrac{(a-3\alpha)(c-4\gamma)}{-(b-4\beta) + \text{etc.}}}}$$

Duplex igitur habetur fractio continua, cuius vtriusque idem eſt valor $\frac{\int PRdx}{\int Pdx}$.

§. 52. Praecipuum autem eſt in hoc negotio, vt definiantur idoneae functiones ipſius x loco P et R ſubſtituendae, quo fiat $(a+n\alpha)\int PR^n dx = (b+n\beta)\int PR^{n+1} dx + (c+n\gamma)\int PR^{n+2}dx$ eo ſaltem caſu, quo poſt ſingulas integrationes ponitur $x = 1$. Ponamus igitur eſſe generaliter $(a+n\alpha)\int PR^n dx + R^{n+1} S = (b+n\beta)\int PR^{n+1} dx + (c+n\gamma)\int PR^{n+2} dx$, atque $R^{n+1} S$ eiusmodi eſſe functionem ipſius x, quae euaneſcat poſito tam $x = 0$, quam $x = 1$. Sumtis ergo differentialibus, et facta per R^n diuiſione, erit: $(a+n\alpha) Pdx + RdS + (n+1) SdR = (b+n\beta) PRdx + (c+n\gamma) PR^2 dx$; quae aequatio, cum ſemper locum habere debeat, quicquid ſit n, in duas reſoluitur aequationes has:

$aPdx + RdS + SdR = bPRdx + cPR^2 dx$ et

$\alpha Pdx + SdR = \beta PRdx + \gamma PR^2 dx$

Ex his aequationibus elicitur duplici modo $Pdx = \frac{RdS + SdR}{bR + cR^2 - a} = \frac{SdR}{\beta R + \gamma R^2 - \alpha}$, vnde fit $\frac{dS}{S} = \frac{(b-\beta)RdR + (c-\gamma)R^2 dR - (a-\alpha)dR}{\beta R^2 + \gamma R^3 - \alpha R} = \frac{(a-\alpha)dR}{\alpha R} + \frac{(\alpha b - \beta a)dR + (\alpha c - \gamma a)RdR}{\alpha(\beta R + \gamma R^2 - \alpha)}$. Ex hac ergo aequatione definitur S per R; inuento autem S erit $P = \frac{SdR}{(\beta R + \gamma R^2 - \alpha)dx}$; indeque cognitae erunt formulae $\int Pdx$ et $\int PRdx$, quibus valor fractionum continuarum ſuperiorum determinatur.

§. 53. Quoniam igitur quantitas R per x non definitur, pro ea functio quaecunque ipſius x accipi poterit. At cum conditio quaeſtionis poſtulet vt $R^{n+1}S$ euaneſcat poſito tam $x = 0$, quam $x = 1$, eo ipſo natura functionis loco R accipiendae determinatur. Deinde vero etiam ad hoc eſt reſpiciendum vt integralia $\int PR^n dx$ poſito poſt integrationem $x = 1$, finitum obtineant valorem, ſi enim integralia iſta hoc caſu fierent vel 0 vel ∞, tum difficulter valor $\frac{\int PRdx}{\int Pdx}$ colligeretur. Prius incommodum tutiſſime euitatur, tribuendo ipſi R eiusmodi valorem, vt PR^n nunquam negatiuum induat valorem, quamdiu x intra limiter 0 et 1 conſiſtit. Ne autem $\int PR^n dx$ poſito $x = 1$ fiat infinitum, difficilius ſaepenumero obtinetur. Conueniet autem caſus, quibus n eſt numerus vel affirmatiuus vel negatiuus a ſe inuicem diſcernere; cum ſaepiſſime, ſi his conditionibus ſatisfiat exiſtente n numero affirmatiuo, ſimul reliquis caſibus ſatisfieri nequeat. Sin autem conditiones praeſcriptae tantum impleantur caſibus, quibus n eſt numerus affirmatiuus, tum prioris fractionis continuae tantum valor exhiberi poteſt; poſterioris vero tantum, ſi conditionibus fuerit ſatisfactum, exiſtente n numero negatiuo.

§. 54. Incipiamus euolutionem huius methodi valores fractionum continuarum inueniendi ab exemplis iam ante tractatis, et primo quidem propoſita ſit iſta fractio continua:

$$r + \cfrac{fh}{r + \cfrac{(f+r)(h+r)}{r + \cfrac{(f+ r)(h+ r)}{r + \text{etc.}}}}$$

cuius valor ſupra §. 34. aſſignatus eſt iſte

$$\frac{h(f-r\int y^{h+r-1}dy:\sqrt{(1-y^{2r})} - f(h-r)\int y^{f+r-1}dy:\sqrt{(1-y^{2r})}}{f\int y^{f+r-1}dy:\sqrt{(1-y^{2r})} - h\int y^{h+r-1}dy:\sqrt{(1-y^{2r})}}$$

Com-

Comparetur ergo haec fractio continua cum iſta generali;

$$\frac{a\int P\,dx}{\int PR\,dx} = b + \cfrac{(a+\alpha)c}{b+\beta+\cfrac{(a+2\alpha)(c+\gamma)}{b+2\beta+\cfrac{(a+\ \alpha)(c+2\gamma)}{b+\ \beta+\ \text{etc.}}}}$$

eritque $b=r$; $\beta=0$; $\alpha=r$; $\gamma=r$; $a=f-r$; $c=b$. His valoribus ſubſtitutis orietur $\frac{dS}{S} = \frac{rR\,dR+(b-r)R^2\,dR-(f-2r)dR}{rR^3-rR}$ $= \frac{(f-2r)dR}{rR} + \frac{r\,dR+(b-f+r)R\,dR}{r(R^2-1)}$: atque integrando $lS = \frac{f-2r}{r}lR + \frac{b-f}{2r}l(R+1) + \frac{b-f+2r}{2r}l(R-1) + lC$ ſeu $S = CR^{\frac{f-2r}{r}}(R^2-1)^{\frac{b-f}{2r}}(R-1)$. Hinc itaque erit $R^{n+1}S = R^{\frac{f+(n-1)r}{r}}(R^2-1)^{\frac{b-f}{2r}}(R-1)$, atque $P\,dx = \frac{CR^{\frac{f-2r}{r}}(R^2-1)^{\frac{b-f}{2r}}dR}{r(R+1)}$.

§. 55. Cum autem $R^{n+1}S$ duobus caſibus euaneſcere debeat poſito tam $x=0$ quam $x=1$; idque quicunque numerus affirmatiuus loco n ſubſtituatur; ad negatiuos enim valores ipſius n reſpicere non eſt opus. Ponamus vero f, b, et r eſſe numeros affirmatiuos atque $b>f$, quod tuto aſſumere licet niſi ſit $f=b$, deinde ſit etiam $f>r$. His poſitis manifeſtum eſt formulam $R^{n+1}S$ duobus caſibus euaneſcere ſcilicet ſi $R=0$ et $R=1$: hocque etiam locum habet ſi ſit $f=b$. Dummodo ergo ſit $f>r$ poni poterit $R=x$. eritque $P\,dx = \frac{x^{\frac{f-2r}{r}}(1-x^2)^{\frac{b-f}{2r}}dx}{1+x}$ determinata conſtante C. Ex his itaque valor fractionis continuae propoſitae erit

$$= \frac{(f-r)\int \frac{x^{\frac{f-2r}{r}}(1-x^2)^{\frac{b-f}{2r}}dx}{1+x}}{\int \frac{x^{\frac{f-r}{r}}(1-x^2)^{\frac{b-f}{2r}}dx}{1+x}}$$

Poſito

Poſito autem $x = y^r$ erit valor quaeſitus $=$

$$\frac{(f-r)\int y^{f-r-1}(1-y^{2r})^{\frac{h-f}{2r}}dy:(1+y^r)}{\int y^{f-1}(1-y^{2r})^{\frac{h-f}{2r}}dy:(1+y^r)}.$$

§. 56. Aliam igitur nacti ſumus expreſſionem huius fractionis continuae

$$r+\cfrac{fh}{r+\cfrac{(f+r)(h+r)}{r+\text{etc}}}$$

valorem continentem, quae etſi formulas integrales in ſe complectitur, tamen diſcrepat ab expreſſione ante inuenta. Haec enim poſterior expreſſio locum non habet niſi ſit $f > r$, pro h autem accipi oportet maiorem quantitatum binarum f et h, ſiquidem fuerint inaequales. Attamen ſi etiam f fuerit minus quam r, valor fractionis continuae exhiberi poteſt conſiderando hanc

$$r+\cfrac{(f+r)(h+r)}{r+\cfrac{(f+2r)(h+2r)}{r+\text{etc.}}}$$

cuius valor erit $= \frac{f\int y^{f-1}(1-y^{2r})^{\frac{h-f}{2r}}dy:(1+y^r)}{\int y^{f+r-1}(1-y^{2r})^{\frac{h-f}{2r}}dy:(1+y^r)}$ quae nulla indiget reſtrictione. Poſito enim hoc valore $= V$ erit fractionis continuae propoſitae valor $= r + \frac{fh}{V}$.

§. 57. Caſus ille quo $f = h$, qui ante peculiari modo erat erutus, eiusque valor in §. 34. inuentus $=$

$$\frac{1-(h-r)\int x^{h-1}dx:(1+x^r)}{\int x^{h-1}dx:(1+x^r)} = \frac{(h-r)\int x^{h-r-1}dx:(1+x^r)}{\int x^{h-1}dx:(1+x^r)}$$

ex hac poſteriore expreſſione ſponte fluit; facto enim $f = h$, expreſſio §. 55. inuenta abibit in hanc $\frac{(h-r)\int y^{h-r-1}dy:(1+y^r)}{\int y^{f-1}dy:(1+y^r)}$

om-

omnino eandem ex quo conſenſus ambarum expreſſionum generalium ſatis perſpicitur. Hic autem tuto accipere licet eſſe $h > r$, cum ii caſus, quibus hoc ſecus accidit, facillime ad hos reducantur, vti modo eſt monſtratum.

§. 58. Quo autem conſenſus ambarum expreſſionum omni caſu intelligatur, praemittendum nobis eſt hoc lemma, quod ab aliis iam eſt demonſtratum. Si fuerit ſeries $1 + \frac{p}{q+s} + \frac{p(p+s)}{(q+s)(q+2s)} + \frac{p(p+s)(p+2s)}{(q+s)(q+2s)(q+3s)} +$ etc. in qua ſint quantitatis p, q, et s affirmatiuae atque $q > p$; huius ſeriei in infinitum continuatae ſumma erit $= \frac{q}{q-p}$. Huius autem lemmatis veritas per methodum meam generalem ſeries ſummandi ſequenti modo euinci poteſt. Conſideretur enim haec ſeries $x^q + \frac{p}{q+s} x^{q+s} + \frac{p(p+s)}{(q+s)(q+2s)} x^{q+2s} +$ etc. cuius ſumma dicatur z, eritque differentiando $\frac{dz}{dx} = q x^{q-1} + p x^{q+s-1} + \frac{p(p+s)}{(q+s)} x^{q+2s-1} +$ etc. atque $x^{p-q-s} dz = q x^{p-s-1} dx + p x^{p-1} dx + \frac{p(p+s)}{q+s} x^{p+s-1} dx +$ etc. quae aequatio integrata dat $\int x^{p-q-s} dz = \frac{q x^{p-s}}{p-s} + x^p + \frac{p x^{p+s}}{q+s} +$ etc. $= \frac{q x^{p-s}}{p-s} + x^{p-q} z$ Ex hac aequatione differentiata prodibit iſta $x^{p-q-s} dz = q x^{p-s-1} dx + x^{p-q} dz + (p-q) x^{p-q-1} z dx$ ſeu $dz (1-x^s) + (q-p) x^{s-1} z dx = q x^{q-1} dx$ ſiue $dz + \frac{(q-p) x^{s-1} z dx}{1-x^s} = \frac{q x^{q-1} dx}{1-x^s}$, cuius integralis eſt $\frac{z}{(1-x^s)^{\frac{q-p}{s}}}$

$$= q \int \frac{x^{q-1} dx}{(1-x^s)^{\frac{q-p+s}{s}}} = \frac{q x^q}{(q-p)(1-x^s)^{\frac{q-p}{s}}} - \frac{pq}{q-p} \int \frac{x^{q-1} dx}{(1-x^s)^{\frac{q-p}{s}}}:$$

vnde erit $z = \frac{q x^q}{q-p} - \frac{pq(1-x^s)^{\frac{q-p}{s}}}{q-p} \int \frac{x^{q-1} dx}{(1-x^s)^{\frac{q-p}{s}}}$. Quare

facto

facto $x = 1$, erit $z = \frac{q}{q-p} = 1 + \frac{p}{q+s} + \frac{p(p+s)}{(q+s)(q+2s)}$ + etc. quae eſt demonſtratio lemmatis dati, ex qua ſimul intelligitur lemmatis veritatem non conſiſtere niſi ſit $q > p$.

§. 59. Cum igitur valorem huius fractionis continuae

$$r + \cfrac{fh}{r + \cfrac{(f+r)(h+r)}{r + \cfrac{(f+2r)(h+2r)}{r + \text{etc.}}}}$$

duplici modo habeamus expreſſum, quorum alter eſt $=$

$$\frac{h(f-r)\int y^{h+r-1}dy:\sqrt{(1-y^{2r})} - f(h-r)\int y^{f+r-1}dy:\sqrt{(1-y^{2r})}}{f\int y^{f+r-1}dy:\sqrt{(1-y^{2r})} - h\int y^{h+r-1}dy:\sqrt{(1-y^{2r})}}$$

alter vero, qui in §. 56. eſt erutus $= r +$

$$\frac{h\int y^{f+r-1}dy\,(1-y^{2r})^{\frac{h-f}{2r}}:(1+y^r)}{\int y^{f-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{h-f}{2r}}:(1+y^r)},$$ operae pretium erit harum expreſſionum conſenſum declarare. Cum igitur ſit $\frac{1}{1+y^r} = \frac{1-y^r}{1-y^{2r}}$ erit $\int y^{f-1}\,dy\,(1-y^{2r})^{\frac{h-f}{2r}}:(1+y^r) = \int y^{f-1}dy\,(1-y^{2r})^{\frac{h-f-2r}{2r}} - \int y^{f+r-1}\,dy\,(1-y^{2r})^{\frac{h-f-2r}{2r}}$, atque $\int y^{f+r-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{h-f}{2r}}:(1+y^r) = \int y^{f+r-1}\,dy(1-y^{2r})^{\frac{h-f-2r}{2r}} - \int y^{f+2r-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{h-f-2r}{2r}} = \int y^{f+r-1}\,dy\,(1-y^{2r})^{\frac{h-f-2r}{2r}}\ \frac{-f}{h}\int y^{f-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{h-f-2r}{2r}}$.

Ponatur $\frac{\int y^{f+r-1}dy\,(1-y^{2r})^{\frac{h-f-2r}{2r}}}{\int y^{f-1}\,dy\,(1-y^{2r})^{\frac{h-f-2r}{2r}}} = \mathrm{V}$, erit valor po-

ſterior

ſterior fractionis continuae $= r + \frac{bV - f}{1 - V}$. Ponatur praeterea $\frac{\int y^{b+r-1}dy : \sqrt{(1-y^{2r})}}{\int y^{f+r-1}dy : \sqrt{(1-y^{2r})}} = W$ erit prior valor $=$ $\frac{b(f-r)W - f(b-r)}{f - bW}$, ex quorum aequalitate ſequitur fore $V = \frac{f}{bW}$ ita vt ſit $\int y^{f+r-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{b-f-2r}{2r}} =$ $\frac{f\int y^{f+r-1}dy : \sqrt{(1-y^{2r})}}{b\int y^{b+r-1}dy : \sqrt{(1-y^{2r})}}$, cuius aequalitatis ratio per Theoremata in praecedente diſſertatione exhibita conſtat: eſt enim per vnum ex illis theorematis $\frac{\int y^{f+r-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{b-f-2r}{2r}}}{\int y^{f+2r-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{b-f-2r}{2r}}}$ $= \frac{\int y^{f+r-1}dy : \sqrt{(1-y^{2r})}}{\int y^{b+r-1}dy : \sqrt{(1-y^{2r})}}$.

§. 60. Conſideremus nunc hanc fractionem continuam

$$2r + \cfrac{fb}{2r + \cfrac{(f+r)(b+r)}{2r + \cfrac{(f+2r)(b+2r)}{2r + \text{etc.}}}}$$

cuius valor ſupra §. 35. inuentus eſt $=$

$$\frac{2(f-r)(b-r)\int y^{f-1}dy : \sqrt{(1-y^{2r})} - b(f+b-3r)\int y^{b+r-1}dy : \sqrt{(1-y^{2r})}}{2b\int y^{b+r-1}dy : \sqrt{(1-y^{2r})} - (f+b-r)\int y^{f-1}dy : \sqrt{(1-y^{2r})}}$$

ſi nunc haec fractio continua comparetur cum hac $\frac{a\int P\,dx}{\int PR\,dx}$

 $= b$

$$=b+\cfrac{(a+\alpha)c}{b+\beta+\cfrac{(a+2\alpha)(c+\gamma)}{b+2\beta+\cfrac{(a+3\alpha)(c+2\gamma)}{b+3\beta+\text{etc.}}}}$$

erit $b=2r$; $\beta=0$; $\alpha=r$; $\gamma=r$; $a=f-r$ et $c=b$. Hinc igitur ex §. 52. habebitur $\frac{dS}{S}=\frac{(f-2r)dR}{rR}+\frac{2c\,dR+(b-f+r)R\,dR}{r(R^2-1)}$ et integrando $S=CR^{\frac{f-2r}{r}}(R^2-1)^{\frac{b-f-r}{2r}}(R-1)^2$ vnde fit $P\,dx=CR^{\frac{f-2r}{r}}(R^2-1)^{\frac{b-f-3r}{2r}}(R-1)^2 dR$ et $R^{n+1}S=CR^{\frac{f+(n-1)r}{r}}(R^2-1)^{\frac{b-f-r}{2r}}(R-1)^2$, quae expreſſio duobus caſibus euaneſcit, ponendo tum $R=0$ tum $R=1$, modo ſit $f>r$ et $b+3r>f$, quibus conditionibus ſemper ſatisfieri poteſt.

§. 61. Sit igitur $R=x$ et conſtante C determinata erit $P\,dx=x^{\frac{f-2r}{r}}dx(1-x^2)^{\frac{b-f-3r}{2r}}(1-x)^2$: vel poſito $R=x=y^r$, erit $P\,dx=y^{f-r-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{b-f-3r}{2r}}(1-y^r)^2$, ex quibus erit valor fractionis continuae propoſitae $\frac{a\int P\,dx}{\int PR\,dx}=$

$$\frac{(f-r)\int y^{f-r-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{b-f-3r}{2r}}(1-y^r)^2}{\int y^{f-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{b-f-3r}{2r}}(1-y^r)^2}$$

quae per theoremata ſuperioris diſſertationis ad priorem formam reduceatur, euoluendo quadratum $(1-y^r)^2$, quo facto vtraque formula integralis in binas ſimpliciores reſoluetur. Ipſam autem reductionem in exemplo ſequente latius patente declarabo.

§. 62.

§. 62. Si habeatur haec formula integralis $\int y^{m-1}dy (1-y^{2r})^{\varkappa}(1-y^{r})^{n}$, atque $(1-y^{r})^{n}$ reſoluatur in ſeriem $1 - ny^{r} + \frac{n(n-1)}{1.2}y^{2r} -$ etc. cuius alternis terminis ſumendis formula integralis propoſita reducetur ad binas ſequentes:

$$\int y^{m-1}dy(1-y^{2r})^{\varkappa}\left(1+\frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{m}{p}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{m(m+2r)}{p(p+2r)}+\text{etc.}\right)$$

$$-\int y^{m+r-1}dy(1-y^{2r})^{\varkappa}\left(n+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{(m+r)}{(p+r)}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot\frac{(m+r)(m+3r)}{(p+r)(p+3r)}\text{ etc.}\right)$$

poſito breuitatis gratia $m+2\varkappa r+2r=p$. Quare ſi fuerit vt in caſu praecedente $n=2$ erit $\int y^{m-1}dy(1-y^{2r})^{\varkappa}(1-y^{r})^{2} = \frac{m+p}{p}\int y^{m-1}dy(1-y^{2r})^{\varkappa} - 2\int y^{m+r-1}dy(1-y^{2r})^{\varkappa}$. Ex quo habebitur $\frac{a\int Pdx}{\int PRdx}$

$$=\frac{\frac{(f-r)(f+b-3r)}{b-2r}\int y^{f-r-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{b-f-3r}{2r}} - 2(f-r)\int y^{f-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{b-f-3r}{2r}}}{\frac{f+b-r}{b-r}\int y^{f-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{b-f-3r}{br}} - 2\int y^{f+r-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{b-f-3r}{2r}}}$$

$$=\frac{b(f+b-3r)\int y^{f+r-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{b-f-3r}{2r}} - 2(f-r)(b-r)\int y^{f-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{b-f-r}{2r}}}{(f+b-r)\int y^{f-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{b-f-r}{2r}} - 2b\int y^{f+r-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{b-f-r}{2r}}}$$

quae expreſſio cum aequalis eſſe debeat illi, quae ſupra §. 35. eſt inuenta, praebebit hanc aequationem:

$$\frac{\int y^{f+r-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{b-f-r}{2r}}}{\int y^{f-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{b-f-r}{2r}}} = \frac{\int y^{b+r-1}dy:\sqrt{(1-y^{2r})}}{\int y^{f-1}dy:\sqrt{(1-y^{2r})}}$$

cuius quidem ratio iam in theorematis ſuperioris diſſertationis continetur.

§. 63. Sumamus nunc viciſſim pro P et R datos valores, ex iisque fractiones continuas formemus; atque po-

namus $P = x^{m-1}(1-x^r)^n(p+qx^r)^{\varkappa}$, et $R = x^r$. Cum autem eſſe debeat $(a+\nu\alpha)\int PR^{\nu}dx = x\,(b+\nu\beta)\int PR^{\nu+1}dx + (c+\nu\gamma)\int PR^{\nu+2}dx$, hincque ob P et R datas fiat ex §. 52. $S = \frac{1}{r}x^{m-r}(1-x^r)^n(p+qx^r)^{\varkappa}(\gamma x^{2r}+\beta x^r-\alpha)$ erit $\frac{dS}{S} = \frac{(m-r)dx}{x} + \frac{nrx^{r-1}dx}{-1+x^r} + \frac{\varkappa qrx^{r-1}dx}{p+qx^r} + \frac{2\gamma rx^{2r-1}dx+\beta rx^{r-1}dx}{\gamma x^{2r}+\beta xr^r-\alpha} = \frac{(a-\alpha)rdx}{\alpha x} + \frac{(\alpha b-\beta a)rx^{r-1}dx+(\alpha c-\gamma a)rx^{2r-1}dx}{\alpha(\gamma x^{2r}+\beta x^r-\alpha)}$. Sit nunc $(p+qx^r)(x^r-1) = \gamma x^{2r}+\beta x^r-\alpha$, erit $\gamma = q\,\beta = p-q$ et $\alpha = p$. Sit praeterea $\frac{(a-\alpha)r}{\alpha} = m-r$, erit $a = \frac{mp}{r}$. Vnde debebit porro eſſe $nqr+\varkappa qr+2qr = \frac{cpr-mpq}{p}$ ſeu $c = \frac{mq}{r}+nq+(\varkappa+2)q$, et tandem $b = \frac{m(p-q)}{r}+(n+1)p-(\varkappa+1)q$. Dummodo ergo m et $n+1$ fuerint numeri affirmatiui, quo $R^{\nu+1}S$ euaneſcat poſito tam $x=0$, quam $x=1$, prodibit ſequens expreſſio

$$\frac{\int x^{m+r-1}dx(1-x^r)^n(p+qx^r)^{\varkappa}}{\int x^{m-1}dx(1-x^r)^n(p+qx^r)^{\varkappa}} = \frac{\int PRdx}{\int Pdx}$$

quae propterea aequalis erit huic fractioni continuae

$$\cfrac{mp}{m(p-q)+(n+1)pr-(\varkappa+1)qr+\cfrac{pq(m+r)(m+nr+(\varkappa+2)r)}{m(p-q)+(n+2)pr-(\varkappa+2)qr+\cfrac{pq(m+2r)(m+(n+1)r+(\varkappa+2)r)}{m(p-q)+(n+3)pr-(\varkappa+3)qr+\text{etc.}}}}$$

§. 64. Quo fractio continua ſimpliciorem induat formam, ponatur $m+nr+r=a$; $m+\varkappa r+r=b$; et $m+nr+\varkappa r+r=c$, fiet $\varkappa = \frac{c-a}{r}$; $n = \frac{c-b}{r}$ et $m = a+b-c-r$; ideoque erit

$$\cfrac{p(a+b-c-r)}{ap-bq+\cfrac{pq(a+b-c)(c+r)}{(a+r)p-(b+r)q+\cfrac{pq(a+b-c+r)(c+2r)}{(a+2r)p-(b+2r)q+\cfrac{pq(a+b-c+2r)(c+r)}{(a+3r)p-(b+3r)q+\text{etc.}}}}}$$

$=$

$$= \frac{\int x^{a+b-c-1} dx (1-x^r)^{\frac{c-b}{r}} (p+qx^r)^{\frac{c-a}{r}}}{\int x^{a+b-c-r-1} dx (1-x^r)^{\frac{c-b}{r}} (p+qx^r)^{\frac{c-a}{r}}}$$ poſito poſt vtramque integrationem $x = 1$. Requiritur autem vt ſint $a+b-c-r$ et $c-b+r$ numeri affirmatiui. Sin autem ponatur breuitatis cauſa $a+b-c-r = g$ erit

$$\frac{\int x^{g+r-1} dx (1-x^r)^{\frac{c-b}{r}} (p+qx^r)^{\frac{c-a}{r}}}{\int x^{g-1} dx (1-x^r)^{\frac{c-b}{r}} (p+qx^r)^{\frac{c-a}{r}}}$$

$$= \cfrac{pg}{ap-bq+\cfrac{pq(c+r)(g+r)}{(a+r)p-(b+r)q+\cfrac{pq(c+2r)(g+2r)}{(a+2r)p-(b+2r)q+\text{etc.}}}}$$

quae aequatio latiſſime patet, et omnes hactenus erutas fractiones continuas ſub ſe comprehendit.

§. 65. Si quantitates c et g inter ſe commutentur, prodibit ſequens fractio continua

$$\cfrac{pc}{ap-bq+\cfrac{pq(g+r)(c+r)}{(a+r)p-(b+r)q+\cfrac{pq(g+2r)(c+2r)}{(a+2r)p-(b+2r)q+\text{etc.}}}}$$

cuius adeo valor erit $$\frac{\int x^{c+r-1} dx (1-x^r)^{\frac{g-b}{r}} (p+qx^r)^{\frac{g-a}{r}}}{\int x^{c-1} dx (1-x^r)^{\frac{g-b}{r}} (p+qx^r)^{\frac{g-a}{r}}}.$$

Quare cum fractiones hae continuae datam inter ſe teneant rationem, ſcilicet g ad c hinc ſequens orietur Theorema reſtituto loco g ſuo valore $$\frac{c\int x^{a+b-c-1} dx (1-x^r)^{\frac{c-b}{r}} (p+qx^r)^{\frac{c-a}{r}}}{\int x^{a+b-c-r-1} dx (1-x^r)^{\frac{c-b}{r}} (p+qx^r)^{\frac{c-a}{r}}}$$

$$= \frac{(a+b-c-r)\int x^{c+r-1} dx (1-x^r)^{\frac{a-c-r}{r}} (p+qx^r)^{\frac{b-c-r}{r}}}{\int x^{c-1} dx (1-x^r)^{\frac{a-c-r}{r}} (p+qx^r)^{\frac{b-c-r}{r}}}$$

Sub

Sub qua ampliſſima forma plurimae egregiae reductiones particulares continentur. Sit verbi gratiae $b = c + r$ erit

$$\frac{c\int x^{a+r-1}dx(p+qx^r)^{\frac{c-a}{r}} : (1-x^r)}{\int x^{a-1}dx(p+qx^r)^{\frac{c-a}{r}} : (1-x^r)} = \frac{a\int x^{c+r-1}dx(1-x^r)^{\frac{a-c-r}{r}}}{\int x^{c-1}dx(1-x^r)^{\frac{a-c-r}{r}}}$$

$= c$, vnde ſequitur fore $\int \frac{x^{a+r-1}dx(p+qx^r)^{\frac{c-a}{r}}}{1-x^r} = \frac{\int x^{a-1}dx(p+qx^r)^{\frac{c-a}{r}}}{1-x^r}$

Habebitur ergo hinc iſtud theorema latius patens

$$\frac{\int x^{m-1}dx(p+qx^r)^{\varkappa}}{1-x^r} = \frac{\int x^{n-1}dx(p+qx^r)^{\varkappa}}{1-x^r},$$

vbi ſemper integrationibus ita inſtitutis vt euaneſcant integralia poſito $x = 0$, fieri intelligitur $x = 1$. Excipitur autem ſolus ille caſus quo eſt $q + p = 0$; quo incommodum accidit.

§. 66. Fractiones continuae, quas hactenus eruimus ope interpolationum, huc redeunt vt denominatores partiales ſint conſtantes. Quo igitur formam generalem nunc inuentam ad eas transferamus, ponatur $p = q = 1$; prodibitque haec fractio coutinua

$$\cfrac{cg}{a-b+\cfrac{(c+r)(g+r)}{a-b+\cfrac{(c+2r)(g+2r)}{a-b+\cfrac{(c+3r)(g+3r)}{a-b+\text{etc:}}}}} = \frac{c\int x^{g+r-1}dx(1-x^r)^{\frac{c-b}{r}}(1+x^r)^{\frac{c-a}{r}}}{\int x^{g-1}dx(1-x^r)^{\frac{c-b}{r}}(1+x^r)^{\frac{c-a}{r}}}$$

vel eiusdem valor erit quoque $= \frac{g\int x^{c+r-1}dx(1-x^r)^{\frac{g-b}{r}}(1+x^r)^{\frac{g-a}{r}}}{\int x^{c-1}dx(1-x^r)^{\frac{g-b}{r}}(1+x^r)^{\frac{g-a}{r}}}$

exiſtente $g = a + b - c - r$. Ponatur $a - b = s$ ob $a + b = c + g + r$ erit $a = \frac{c+g+r+s}{2}$ et $b = \frac{c+g+r-s}{2}$,

vnde

vnde fiet
$$\cfrac{cg}{s+\cfrac{(c+r)(g+r)}{s+\cfrac{(c+2r)(g+2r)}{s+\text{etc.}}}}$$

$$=\frac{c\int x^{g+r-1}dx(1-x^{2r})^{\frac{c-g-r-s}{2r}}(1-x^r)^{\frac{s}{r}}}{\int x^{g-1}dx(1-x^{2r})^{\frac{c-g-r-s}{2r}}(1-x^r)^{\frac{s}{r}}}=$$

$$\frac{g\int x^{c+r-1}dx(1-x^{2r})^{\frac{g-c-r-s}{2r}}(1-x^r)^{\frac{s}{r}}}{\int x^{c-1}dx(1-x^{2r})^{\frac{g-c-r-s}{2r}}(1-x^r)^{\frac{s}{r}}}$$

§. 67. Ponamus vt ad formam §. 47. perueniatur $2s$ loco s, ſitque $c=q$ et $g=r-q$, habebitur haec fractio continua
$$\cfrac{q(r-q)}{2s+\cfrac{(q+r(2r-q)}{2s+\cfrac{(q+2r)(3r-q)}{2s+\text{etc.}}}}$$

cuius valor adeo erit vel $=\dfrac{q\int x^{2r-q-1}dx(1-x^{2r})^{\frac{q-r-s}{r}}(1-x^r)^{\frac{2s}{r}}}{\int x^{r-q-1}dx(1-x^{2r})^{\frac{q-r-s}{r}}(1-x^r)^{\frac{2s}{r}}}$

vel $=\dfrac{(r-q)\int x^{q+r-1}dx(1-x^{2r})^{\frac{-q-s}{r}}(1-x^r)^{\frac{2s}{r}}}{\int x^{q-1}dx(1-x^{2r})^{\frac{-q-s}{r}}(1-x^r)^{\frac{2s}{r}}}$. Eiusdem autem fractionis continuae valor ante eſt inuentus $=$ $\dfrac{(q+s)\int y^{r+s+q-1}dy:\sqrt{(1-y^{2r})}}{\int y^{r+s-q-1}dy:\sqrt{(1-y^{2r})}}-s$. Quamobrem iſtae

 for-

formulae integrales interſe erunt aequales; quod eſt theorema minime contemnendum.

§. 68. Sit vti §. 48. poſuimus $r=2$, et $q=1$ erit

$$\frac{(1+s)\int y^{s+2}dy:\sqrt{(1-y^4)}}{\int y^s dy:\sqrt{(1-y^4)}}-s=\frac{\int x^2 dx(1-x^4)^{\frac{-s-1}{2}}(1-x^2)^s}{\int dx(1-x^4)^{\frac{-s-1}{2}}(1-x^2)^s}$$

quae aequalitas conſpicua eſt ſi $s=0$; caſibus autem quibus s eſt numerus integer impar, aequalitas non difficulter oſtenditur. Vt ſi fuerit $s=1$, erit poſterior formula $\frac{\int xxdx:(1+xx)}{\int dx:(1+xx)}=\frac{x-\int dx:(1+xx)}{\int dx:(1+xx)}=\frac{4-\pi}{\pi}$ poſito $x=1$. Prior vero formula dabit in $\frac{2\int y^3dy:\sqrt{(1-y^4)}}{\int ydy:\sqrt{(1-y^4)}}-1=\frac{4}{\pi}-1=\frac{4-\pi}{\pi}$ prorſus vti praecedens. At ſi s numerus par, per euolutionem poteſtatis $(1-xx)^s$ conſenſus ambarum expreſſionum facile perſpicietur.

§. 69. Praeter fractiones autem continuas hactenus erutas forma generalis inuenta innumerabiles alias ſub ſe complectitur; ex quibus nonnullas euoluere expediet. Sit igitur $g=c$, eritque huius fractionis continuae

$$\cfrac{c^2}{s+\cfrac{(c+r)^2}{s+\cfrac{(c+2r)^2}{s+\text{etc.}}}}$$

$$\text{valor}=\frac{c\int x^{c+r-1}dx(1-x^r)^{\frac{s}{r}}:(1-x^{2r})^{\frac{r+s}{2r}}}{\int x^{c-1}dx(1-x^r)^{\frac{s}{r}}:(1-x^{2r})^{\frac{r+s}{2r}}}.$$ Ponatur

$c=1$; et $r=1$, eritque

$$\cfrac{1}{s+\cfrac{4}{s+\cfrac{9}{s+\cfrac{16}{s+\text{etc.}}}}}=$$

$$= \frac{\int x\,dx(1-x)^s:(1-xx)^{\frac{s+1}{2}}}{\int dx(1-x)^s:(1-xx)^{\frac{s+1}{2}}},$$ cuius expreſſionis valores, quos pro variis ipſius s ſignificationibus induit, inveſtigemus. Poſito igitur huius expreſſionis valore $= V$, erit vt ſequitur:

$$\text{ſi } s=0;\ V = \frac{\int x\,dx:V(1-xx)}{\int dx:V(1-xx)} = \frac{1}{2\int dy:(1+yy)}$$

$$\text{ſi } s=2;\ V = \frac{2\int dx:V(1-xx)-3\int x\,dx:V(1-xx)}{2\int x\,dx:V(1-xx)-\int dx:V(1-xx)} = \frac{1}{2\int y^2 dy:(1+yy)} - 2$$

$$\text{ſi } s=4;\ V = \frac{19\int x\,dx:V(1-xx)-12\int dx:V(1-xx)}{3\int dx:V(1-xx)-4\int x\,dx:V(1-xx)} = \frac{1}{2\int y^4 dy:(1+yy)} - 4$$

Generaliter autem erit

$$V = \frac{1}{2\int y^s dy:(1+yy)} - s,$$ ex qua forma apparet, ſi fuerit s numerus integer par, quadraturam circuli inuolui, contra autem ſi s impar, logarithmos.

§. 70. Propoſita nunc nobis ſit haec fractio continua

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{4}{3 + \cfrac{9}{4 + \cfrac{16}{5 + \cfrac{25}{6 + \text{etc.}}}}}}$$

Comparetur haec cum forma §. 64. exhibita, fietque $pq\,cg = 1$; $pq(c+r)(g+r) = 4$, $pq(c+2r)(g+2r) = 9$; $ap-bq = 2$, et $(p-q)r = 1$, vnde erit $c=g=r$; $p = \frac{\sqrt{5}+1}{2r}$; $q = \frac{\sqrt{5}-1}{2r}$; $a = \frac{r(1+3\sqrt{5})}{2\sqrt{5}}$ et $b = \frac{r(3\sqrt{5}-1)}{2\sqrt{5}}$, quibus

bus ſubſtitutis habebitur valor propoſitae fractionis continuae

$$= 1 + \frac{(\sqrt{5}-1)\int x^{2r-1}dx(1-x^r)^{\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}}(1+\sqrt{5}+(\sqrt{5}-1)x^r)^{\frac{-\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}}}{2\int x^{r-1}dx(1-x^r)^{\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}}(1+\sqrt{5}+(\sqrt{5}-1)x^r)^{\frac{-\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}}}$$

Ex qua expreſſione ob exponentes ſurdos nihil concludi poteſt notatu dignum.

§. 71. Cum in his fractionibus continuis numeratores partiales ex duobus factoribus ſint compoſiti, ita nunc ad eiusmodi fractiones continuas pergam, in quibus numeratores hi partiales progreſſionem arithmeticam conſtituant. Fiat igitur, ad §. 50. recurrendo, $\gamma = 0$ et $c = 1$. erit

$$\frac{\int PRdx}{\int Pdx} = \cfrac{a}{b + \cfrac{a+\alpha}{b+\beta+\cfrac{a+2\alpha}{b+2\beta+\cfrac{a+3\alpha}{b+3\beta+ \text{etc.}}}}}$$

Oportet autem ſumi $\frac{dS}{S} = \frac{(a-\alpha)dR}{\alpha R} + \frac{(\alpha b-\beta a)dR + \alpha R dR}{\alpha(\beta R-\alpha)} = \frac{(a-\alpha)dR}{\alpha R} + \frac{dR}{\beta} + \frac{(\alpha^2+\alpha\beta b-\beta^2 a)dR}{\alpha\beta(\beta R-\alpha)}$, vnde fit $S = Ce^{\frac{R}{\beta}} R^{\frac{a-\alpha}{\alpha}} (\beta R-\alpha)^{\frac{\alpha^2+\alpha\beta b-\beta^2 a}{\alpha\beta\beta}}$.

Ponatur $R = \frac{\alpha x}{\beta}$, erit $S = C e^{\frac{\alpha x}{\beta\beta}} x^{\frac{a-\alpha}{\alpha}} (1-x)^{\frac{\alpha^2+\alpha\beta b-\beta^2 a}{\alpha\beta\beta}}$ ac $R^{n+1}S$ duplici caſu euaneſcit, poſito ſcilicet tam $x = 0$ quam $x = 1$, modo ſit $\alpha^2 + \alpha\beta b > \beta^2 a$. Hinc ergo erit $Pdx = e^{\frac{\alpha x}{\beta\beta}} x^{\frac{a-\alpha}{\alpha}} dx(1-x)^{\frac{\alpha^2+\alpha\beta b-\alpha\beta^2-\beta^2 a}{\alpha\beta\beta}}$ atque fractionis continuae propoſitae valor $= \frac{\int PRdx}{\int Pdx} =$

$$\frac{\alpha\int e^{\frac{\alpha x}{\beta\beta}} x^{\frac{a}{\alpha}} dx(1-x)^{\frac{\alpha^2+\alpha\beta b-\alpha\beta^2-\beta^2 a}{\alpha\beta\beta}}}{\beta\int e^{\frac{\alpha x}{\beta\beta}} x^{\frac{a-\alpha}{\alpha}} dx(1-x)^{\frac{\alpha^2+\alpha\beta b-\alpha\beta^2-\beta^2 a}{\alpha\beta\beta}}}$$ poſito poſt integrationem $x = 1$.

§. 72.

§. 72. Vt hic caſus exemplo illuſtretur ſit $a = 1$, $b = 1$, $\alpha = 1$, et $\mathfrak{b} = 1$, habebitur haec fractio continua

$$\cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{3}{3 + \cfrac{4}{4 + \text{etc.}}}}}$$

cuius valor erit $= \frac{\int e^x x\,dx}{\int e^x dx} = \frac{e^x x - e^x + 1}{e^x - 1} = \frac{1}{e-1}$ poſito $x = 1$. Vnde erit $e = 2 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{3}{3 + \cfrac{4}{4 + \cfrac{5}{5 + \text{etc.}}}}}$

qua expreſſione ſatis cito ad valorem numeri e, cuius logarithmus eſt $= 1$, pertingitur.

§. 73. Ponamus nunc in ſuperiori fractione continua §. 71. data, eſſe $\mathfrak{b} = 0$, vt ſit

$$\frac{\int PR\,dx}{\int P\,dx} = \cfrac{a}{b + a + \cfrac{\alpha}{b + a + \cfrac{2\alpha}{b + a + \cfrac{3\alpha}{b + \text{etc.}}}}}$$

erit $\frac{dS}{S} = \frac{(a-\alpha)dR}{\alpha R} - \frac{b\,dR}{\alpha} - \frac{R\,dR}{\alpha}$, hincque $S = CR^{\frac{a-\alpha}{\alpha}} e^{\frac{-2bR-RR}{2\alpha}}$; Duplici nunc caſu $R^{n+1}S$ euaneſcit, quorum alter eſt ſi $R = 0$, alter ſi $R = \infty$, modo ſint a et α numeri affirmatiui. Ponatur ergo $R = \frac{x}{1-x}$ eritque $S = Cx^{\frac{a-\alpha}{\alpha}} : (1-x)^{\frac{a-\alpha}{\alpha}} e^{\frac{2bx-(2b-1)xx}{2\alpha(1-x)^2}}$. Ob $dR = \frac{dx}{(1-x)^2}$ erit $\int P dx$

 $=$

$$=\int \frac{x^{\frac{a-\alpha}{\alpha}}\,dx}{(1-x)^{\frac{a+\alpha}{\alpha}}\, e^{\frac{2bx-(2b-1)xx}{2\alpha(1-x)^2}}}$$ atque $\int P R\, dx =$

$$\int \frac{x^{\frac{a}{\alpha}}\,dx}{(1-x)^{\frac{a+2\alpha}{\alpha}}\, e^{\frac{2bx-(2b-1)xx}{2\alpha(1-x)^2}}}.$$

§. 74. Sit denique in §. 50, $a=1$; $c=1$ $\alpha=0$, $\gamma=0$, erit $\frac{\int PRdx}{\int Pdx} = \cfrac{1}{b+\cfrac{1}{b+\beta+\cfrac{1}{b+2\beta+\cfrac{1}{b+3\beta+\text{etc.}}}}}$

atque $\frac{dS}{S}=\frac{R^2dR+(b-\beta)RdR-dR}{\beta R^2}$; vnde fiet $S=$ $e^{\frac{RR+1}{\beta R}}R^{\frac{b-\beta}{\beta}}$, et $Pdx=e^{\frac{RR+1}{\beta R}}R^{\frac{b-2\beta}{\beta}}dR$ atque $P R\, dx$ $=e^{\frac{RR+1}{\beta R}}R^{\frac{b-\beta}{\beta}}dR$. Oportet autem R talem eſſe functionem ipſius x, vt R^{n+1} euaneſcat poſito tam $x=0$, quam $x=1$. Eiusmodi autem functionem aſſignare, opus eſt multo difficilius, quam pro reliquis caſibus. Neque igitur hunc caſum eadem methodo reſoluere conabor ſed eum alii methodo nunc exponendae reſeruabo.

§. 75. Huius quidem methodi ad fractiones continuas perueniendi iam ante aliquod tempus feci mentionem, ſed quoniam tum caſum tantum particularem tractaui, hic eam fuſius exponere conueniet. Continetur ea autem non vti praecedens formulis integralibus, ſed reſolutione aequationis differentialis ſimilis illi, quam quondam Comes Riccati pro-

propoſuit. Conſidero ſcilicet hanc aequationem $ax^m dx + bx^{m+1} y dx + cy^2 dx + dy = 0$, quae ponendo $x^{m+3} = t$ et $y = \frac{1}{cx} + \frac{1}{xxz}$ tranſit in hanc: $\frac{-c}{m+3}\, t^{\frac{-m-4}{m+3}} dt - \frac{b}{m+3}\, t^{\frac{-1}{m+3}} z\, dt - \frac{(ac+b)}{(m+3)c} z^2 dt + dz = 0$, quae ſimilis eſt priori. Quare ſi conſtaret valor ipſius z per t, ſimul y per x innoteſceret. Reducatur autem eodem modo haec aequatio ad aliam ſui ſimilem ponendo $t^{\frac{2m+5}{m+3}} = u$, et $z = \frac{-(m+3)c}{(ac+b)t} + \frac{1}{ttv}$, ac iſtiusmodi reductiones continuentur in infinitum, quo facto ſi omnes valores poſteriores in praecedentibus ſubſtituantur, exprimetur y ſequenti modo.

$$y = Ax^{-1} + \cfrac{1}{-Bx^{-m-1} + \cfrac{1}{Cx^{-1} + \cfrac{1}{-Dx^{-m-1} + \cfrac{1}{Ex^{-1} + \cfrac{1}{-Fx^{-m-1} + \text{etc.}}}}}}$$

litterae vero A, B, C, D, etc. ſequentes obtinebunt valores

$$A = \frac{1}{c}$$

$$B = \frac{(m+3)c}{ac+b}$$

$$C = \frac{(2m+5)(ac+b)}{c(ac-(m+2)b)}$$

$$D = \frac{(3m+\quad)c(ac-(m+2)b)}{(ac+b)(ac+(m+3)b)}$$

$$E = \frac{(4m+9)(ac+b)(ac+(m+3)b)}{c(ac-(m+2)b)(ac-(2m+4)b)}$$

$$F = \frac{(5m+11)c(ac-(m+2)b)(ac-(2m+4)b)}{(ac+b)(ac+(m+3)b)(ac+(2m+5)b)}$$

etc.

quae determinationes ſimplicius ſequentibus aequationibus comprehenduntur:

AB =

$AB = \frac{m+3}{ac+b}$ || $DE = \frac{(3m+7)(4m+9)}{ac-(2m+4)b}$

$BC = \frac{(m+3)(2m+5)}{ac-(m+2)b}$ || $EF = \frac{(4m+9)(5m+11)}{ac+(2m+5)b}$

$CD = \frac{(2m+5)(3m+7)}{ac+(m+3)b}$ || $FG = \frac{(5m+11)(6m+13)}{ac-(3m+6)b}$

etc. || etc.

76. Si nunc hi valores in fractione continua inuenta ſubſtituantur reperietur:

$$cxy = 1 + \cfrac{(ac+b)x^{m+2}}{-(m+3) + \cfrac{(ac-(m+2)b)x^{m+2}}{(2m+5) + \cfrac{(ac+(m+3)b)x^{m+2}}{-(3m+7) + \cfrac{(ac-(2m+4)b)x^{m+2}}{(4m+9) + \text{etc.}}}}}$$

Ex hac expreſſione patet aequationem propoſitam abſolute eſſe integrabilem caſibus quibus b aequatur termino cuipiam huius progreſſionis $-ac$; $-\frac{ac}{m+3}$; $-\frac{ac}{2m+5}$; $-\frac{ac}{3m+7}$; etc. $-\frac{ac}{im+2i+1}$ deinde etiam caſibus quibus b eſt termiuus huius progreſſionis: $\frac{ac}{m+2}$; $\frac{ac}{2(m+2)}$; $\frac{ac}{3(m+2)}$; etc. $\frac{ac}{im+2i}$ Fractio autem haec continua aequationis propoſitae exhibet integrale huius conditionis, vt poſito $x = 0$, fiat $cxy = 1$, ſiquidem $m+2 > 0$; at ſi $m+2 < 0$, tum integrale hanc tenet legem vt poſito $x = \infty$ fiat $cxy = 1$.

§. 77. Ponamus eſſe $b = 0$; atque $a = nc$, ac poſt integrationem poni $x = 1$; proueniet ex hac aequatione $ncx^m dx + cy^2 dx + dy = 0$ ſequens fractio continua, qua valor ipſius y definietur, caſu quo ponitur $x = 1$:

$$y = \frac{1}{c} + \cfrac{n}{-\frac{(m+3)}{c} + \cfrac{n}{\frac{(2m+5)}{c} + \cfrac{n}{-\frac{(3m+7)}{c} + \cfrac{n}{\frac{(4m+9)}{c} + \text{etc.}}}}}$$

ſiue

ſiue ponatur $c = \frac{1}{\varkappa}$, ex aequatione $n x^m dx + y^2 dx + \varkappa dy = 0$, valor ipſius y caſu quo $x = 1$, ita ſe hebebit

$$y = \varkappa + \cfrac{n}{-(m\varkappa + 3\varkappa) + \cfrac{n}{(2m\varkappa + 5\varkappa) + \cfrac{n}{-(3m\varkappa + 7\varkappa) + \text{etc.}}}}$$

ſeu
$$y = \varkappa - \cfrac{n}{m\varkappa + 3\varkappa - \cfrac{n}{2m\varkappa + 5\varkappa - \cfrac{n}{3m\varkappa + 7\varkappa - \cfrac{n}{4m\varkappa + 9\varkappa - \text{etc.}}}}}$$

§. 78. Si ergo propoſita ſit iſta fractio continua

$$b + \cfrac{1}{b + \beta + \cfrac{1}{b + 2\beta + \cfrac{1}{b + 3\beta + \cfrac{1}{\text{etc.}}}}}$$

erit $\varkappa = b$; $n = -1$; $(m + 2)b = \beta$ ſeu $m = \frac{\beta}{b} - 2$. Quare huius fractionis continuae valor erit valor ipſius y caſu quo $x = 1$, ex hac aequatione $x^{\frac{\beta - 2b}{b}} dx = y^2 dx + b dy$, integratione ita inſtituta, vt poſito $x = 0$, fiat $x y = b$. cum ſit $m + 2 > 0$, ſi quidem $\frac{\beta}{b}$ ſit numerus affirmatiuus.

DETERMINATIO CALORIS ET FRIGORIS GRADVVM PRO SINGVLIS TERRAE LOCIS AC TEMPORIBVS.

§. 1.

Tab. I. Hoc loco in caloris et frigoris gradus a priori inquirere conſtitui, quatenus a ſola actione ſolis proficiſcuntur: et hanc ob rem neque ad ventos, neque ad tempeſtatum diuerſitatem, quibus actio ſolis vehementer turbatur, reſpicio. In hoc itaque potiſſimum ero occupatus, vt remotis iſtis impedimentis pro quouis terrae loco et tempore gradum caloris frigorisue definiam a ſola actione ſolis oriundum. Cum igitur ad hoc expediendum neceſſe ſit gradum caloris quendam fixum et conſtantem adhibere, huius loco eum aſſumo, qui in ipſa ſolis ſuperficie perpetuo viget, quemque conſtanter littera c deſignabo.

§. 2. Ad effectum autem ſolis in calore producendo definiendum concipio corpus plana ſuperficie praeditum perpetuo ſoli ita expoſitum eſſe, vt radii ſolares normaliter in eius ſuperficiem planam incidant. Senſim igitur iſtud corpus a ſole calefiet, atque continuo maiorem caloris gradum recipiet, donec tandem ſummum gradum acquiſierit, quem ſi ſemel fuerit conſecutum, eum in aeternum ſit conſeruaturum. Gradum iſtum caloris appellabo vltimum ſiue naturalem caloris gradum, quem his circumſtantiis exerere valet.

§. 3. Cum igitur calor a radiis ſolis proficiſcatur hique diuergant ita, vt in duplicata ratione diſtantiarum a ſole fiant rariores; etiam vltimus caloris gradus, quem ſol

ſol ſuperficiei planae directe oppoſitae inducere poteſt, tenebit rationem reciprocam duplicatam diſtantiarum a ſole. Quare ſi diſtantia huius corporis a ſole ponatur $= s$, et ſemidiameter ſolis $= 1$, erit vltimus caloris gradus $= \frac{c}{ss}$; quoniam, ſi corpus in ipſa ſolis ſuperficie ſeu in diſtantia 1 ab eius centro eſſet poſitum, eundem caloris gradum acciperet, qui in ſuperficie ſolis exiſtit.

§ 4. At ſi radii ſolis oblique in ſuperficiem corporis cadant, tum vtique tantus calor non generabitur, quam praecedente caſu, quo radii ſolis normaliter in ſuperficiem incidebant. Primo quidem ſatis perſpicuum eſt, ſi ſolis radii tantum lambant ſuperficiem, ſeu ſi angulus incidentiae radiorum euaneſcat, tum effectum omnino nullum a ſole produci poſſe. Ex quo ſatis tuto aſſumi poſſe videtur, gradum caloris vltimum, quem ſuperficies recipit eſſe ſinui anguli incidentiae proportionalem; quando quidem ſuperficies illuminatur. Nam ſi ſol infra horizontem verſetur, tum ſinus incidentiae fieret negatiuus non autem videtur, effectum ſolis vnquam in negatiuum abire poſſe. Quare, ſi ſol ſub horizonte exiſtit, eius effectus aliter ſpectari nequit, ac ſi ipſum horizontem occuparet, hoc eſt vltimus gradus caloris ſemper erit $= 0$, quantumuis profunde ſol ſub horizonte ſit ſubmerſus.

§. 5. Si ergo ſumatur in terra locus quicunque, definiri poterit gradus caloris, quem radii ſolis in data obliquitate incidentes tandem inducerent, ſi quidem ſol perpetuo eundem ſitum reſpectu iſtius loci retineret. Namque ſit altitudinis ſolis ſupra horizontem illius loci ſinus $= v$, poſito ſinu toto $= 1$, erit vltimus caloris gradus, cuius hic locus eſt capax $= \frac{cv}{ss}$, denotante ſemper s di-

 ſtantiam

ſtantiam ſolis a terra, exiſtente ſemidiametro ſolis $= 1$; ſiue etiam ſpectari poteſt s tanquam cotangens ſemidiametri ſolis apparentis. Vel ſi tangens ſemidiametri ſolis apparentis ponatur $= \varkappa$, erit vltimus gradus caloris $= c\varkappa^2 v$: ſi quidem ſol verſetur ſupra horizontem: at ſi ſol ſub horizonte lateat, gradus iſte erit $= 0$, qui eſt extremus ſummusque frigoris gradus.

§. 6. Hoc igitur modo vbique terrarum calor foret comparatus, ſi ſol reſpectu terrae quieſceret, ac perpetuo eundem ſitum retineret. Scilicet in iis regionibus in quibus ſol appareret, foret aliquis caloris gradus, isque eo maior, quo magis ſol fuerit eleuatus. In altero autem hemisphaerio, a ſole averſo, ſummum perpetuo regnaret frigus, niſi quatenus calor partis oppoſitae influeret. Hic vero ab iſtiusmodi circumſtantiis cogitationes prorſus abſtineo, neque alium caloris fontem praeter ſolem, conſidero. Hancque ob rem omnem materiam terreſtrem cuiusvis gradus caloris et frigoris aeque ſuſceptibilem pono, ita vt quouis tempore in eum ſtatum conſtituatur, quem regulae requirunt.

§. 7. Si igitur terrae regio iam illum ipſum habeat caloris gradum, quem ſol ipſi communicare conetur, quemque actu tandem induceret, niſi eum iam haberet; tum nulla eueniet mutatio caloris in ea regione, ſed ille ipſe gradus conſeruabitur. At ſi praeſens regionis calor vel maior ſit vel minor, quam calor naturalis ſitui ſolis reſpondens, tum paullatim ille calor vel diminuetur vel augebitur, donec tandem calori ſolis naturali aequalis fiat. Veriſimile autem videtur, caloris illius vel augmenta vel decrementa, quae dato tempore gignuntur, differentiae calorum

calorum ſolis ſcilicet naturalis et proprii, quem corpus habet, eſſe proportionalia. Cum enim aequalitas amborum caloris graduum tanquam finis ſit propoſita, eo fortior ad eam obtinendam erit actio, quo maior fuerit inaequalitas.

§. 8. Si ergo ponamus in regione terrae quadam caloris praeſentis gradum eſſe z; atque ſolem in altitudine ſupra horizontem verſari, cuius ſinus ſit $= v$; erit calor naturalis a ſole oriundus $= c\varkappa^2 v$, denotante c gradum caloris in ſuperficie ſolis et $\varkappa$ tangentem ſemidiametri apparentis ſolis. Tempuſculo igitur dt calor regionis z incrementum accipiet proportionale exceſſui $c\varkappa^2 v - z$, ſiquidem fuerit $c\varkappa^2 v > z$, contrario enim caſu calor z decrementum patietur. Hinc ergo erit $dz = \alpha dt (c\varkappa^2 v - z)$: ac ſi ſol perpetuo iſtum ſitum obtineret, foret integrando $\alpha t = l \frac{C}{c\varkappa^2 v - z} = l \frac{c\varkappa^2 v - f}{c\varkappa^2 v - z}$; ſi f denotet gradum caloris, qui in ea regione fuit, principio a quo tempus t computatur.

§. 9. His nunc praemiſſis hypotheſibus pro quouis terrae loco gradum caloris difinire conabor ad quamlibet horam dati diei. Sit igitur HOR horizon loci propoſiti, Z zenith, P polus mundi borealis, et AOB parallelus, in quo ſol die propoſito mouetur. Sit eleuationis poli PR ſinus $=$ P coſinus $= p$, poſito ſinu toto $= 1$; ſinus declinationis borealis ſolis $=$ Q, coſinus $= q$, ſinusque Q abibit in ſui negatiuum, ſi declinatio ſolis ſit auſtralis. Ponamus ſolem in S verſari, angulumque APS eſſe $= t$, qui angulus exprimit tempus, quo ſol poſt tranſitum per meridianum ex A in S peruenit; an- Tab. I. fig. 1.

 guliquc

gulique APS ſinus ſit $= x$ coſinus $= y$; erit $dt = \frac{dx}{y} = \frac{-dy}{x}$ ob $xx + yy = 1$.

§. 10. Quoniam nunc in triangulo ſphaerico PZS dantur primo angulus ZPS, cuius ſinus eſt x et coſinus y; deinde latus PZ, cuius ſinus eſt p, coſinus P; et tertio latus PS cuius ſinus eſt q, coſinus Q, reperietur lateris ZS coſinus $= pqy + PQ$; qui ſimul eſt ſinus altitudinis ſolis ſuper horizonte, dum in S verſatur. Solis igitur occaſus continget in puncto O, exiſtente anguli APO coſinu $= \frac{-PQ}{pq}$. Ponamus autem eſſe angulum ipſum APO $= g$, quo ſemiſſis temporis diurni deſignabitur atque poſito angulo 180. grad. $= \pi$, erit $\pi - g$ tempus dimidiae noctis.

§. 11. Inquiramus nunc primum in varietatem caloris regionis propoſitae, quamdiu ſol ſupra horizontem verſatur, ſitque tempore t poſt meridiem, quo ſol in S reperitur, gradus caloris in loco propoſito $= z$. Quoniam vero hoc tempore eſt ſinus altitudinis ſolis $= pqy + PQ$, erit calor ſolis naturalis $= c\varkappa^2 (pqy + PQ)$. Quamobrem tempuſculo dt, quod per angulum SPs repraeſentatur, calore z incrementum capiet dz tantum, vt ſit $dz = \alpha dt\,(c\varkappa^2 pqy + c\varkappa^2 PQ - z)$, in qua aequatione α quantitatem quandam conſtantem denotat, per obſeruationes determinandam.

§. 12. Aequatio differentialis inuenta $dz = \alpha dt\,(c\varkappa^2 pqy + c\varkappa^2 PQ - z)$ reducatur ad hanc formam $dz + \alpha z dt = \alpha c\varkappa^2 dt\,(pqy + PQ)$ quae multiplicata per $e^{\alpha t}$ denotante e numerum, cuius logarithmus hyperbolicus eſt $= 1$, fiet integrabilis: erit enim integrale $e^{\alpha t} z =$

$\alpha c\varkappa^2$

$\alpha c\varkappa^2 \int e^{\alpha t} dt (pqy + PQ) = c\varkappa^2 PQ e^{\alpha t} + \alpha c\varkappa^2 pq \int e^{\alpha t} dx$ ob $y dt = dx$. Cum autem ſit $t = \int \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$ erit $\int e^{\alpha t} dx = \int e^{\int \frac{\alpha dx}{\sqrt{(1-xx)}}} dx = \frac{e^{\alpha t}(x+\alpha\sqrt{(1-xx)})}{1+\alpha\alpha}$. Addita ergo indefinita conſtante habebitur $e^{\alpha t} z = Cc\varkappa^2 pq + c\varkappa^2 PQ e^{\alpha t} + \frac{\alpha c\varkappa^2 pq e^{\alpha t}(x+\alpha y)}{1+\alpha\alpha}$, atque calor quaeſitus $z = e^{-\alpha t} Cc\varkappa^2 pq + c\varkappa^2 PQ + \frac{\alpha c\varkappa^2 pq(x+\alpha y)}{1+\alpha\alpha}$.

§. 13. Hinc igitur reperietur calor meridianus loci propoſiti faciendo $t = 0$, quo facto erit $x = 0$, et $y = 1$. Quare tempore meridiei erit calor $= Cc\varkappa^2 pq + c\varkappa^2 PQ + \frac{\alpha^2 c\varkappa^2 pq}{1+\alpha\alpha}$ Si detur calor meridianus, isque ponatur $= f$, determinabitur inde conſtans quantitas C, quae per integrationem eſt ingreſſa, eritque $Cc\varkappa^2 pq = f - c\varkappa^2 PQ - \frac{\alpha^2 c\varkappa^2 pq}{1+\alpha\alpha}$; vnde ex dato calore meridiano definietur calor pro quauis hora eiusdem diei, ita vt ſole in S exiſtente poſt meridiem ſit calor regionis propoſitae $z = e^{-\alpha t} f + c\varkappa^2 PQ(1 - e^{-\alpha t}) + \frac{\alpha c\varkappa^2 pq(x+\alpha y)}{1+\alpha\alpha} - \frac{\alpha^2 c\varkappa^2 pq e^{-\alpha t}}{1+\alpha\alpha}$.

§. 14. Inueſtigemus nunc gradum caloris, qui fuit eodem die, cum ſol eſt ortus; poni debebit $t = -g$, eritque pariter ac in occaſu $y = \frac{-PQ}{pq}$ at $x = -\frac{\sqrt{(p^2q^2 - P^2Q^2)}}{pq}$, ob angulos ante meridiem negatiuos. Ex quibus prodibit calor, quando ſol oritur $= e^{\alpha g} f - c\varkappa^2 PQ(e^{\alpha g} - 1) - \frac{\alpha c\varkappa^2(\alpha PQ + \sqrt{(p^2q^2 - P^2Q^2)})}{1+\alpha\alpha} - \frac{\alpha^2 c\varkappa^2 pq e^{\alpha g}}{1+\alpha\alpha} = e^{\alpha g}(f - c\varkappa^2 PQ - \frac{\alpha^2 c\varkappa^2 pq}{1+\alpha\alpha}) + \frac{c\varkappa^2 PQ - \alpha c\varkappa^2 \sqrt{(p^2q^2 - P^2Q^2)}}{1+\alpha\alpha}$. At ſi anguli g ſinus ponatur $= m$, coſinus $= n$; erit calor tempore ortus ſolis $= e^{\alpha g}(f + c\varkappa^2 npq - \frac{\alpha^2 c\varkappa^2 pq}{1+\alpha\alpha}) - \frac{c\varkappa^2 npq - \alpha c\varkappa^2 mpq}{1+\alpha\alpha}$.

§. 15.

§. 15. Perueniet nunc ſol ad occaſum in O fietque $t = g$; $y = n = \frac{-PQ}{pq}$ et $x = m = \frac{\sqrt{(p^2q^2 - P^2Q^2)}}{pq}$, ideoque $PQ = -npq$. Hinc igitur tempore occaſus ſolis prodibit calor loci propoſiti $= e^{-\alpha g}(f + c\kappa^2 npq - \frac{\alpha^2 c\kappa^2 pq}{1+\alpha\alpha}) - \frac{c\kappa^2 npq + \alpha c\kappa^2 mpq}{1+\alpha\alpha}$. Maximus autem hoc die calor erit tum, quando fit $z = c\kappa^2 pqy + c\kappa^2 PQ$; quippe quo tempore erit $dz = 0$. Subſtituto autem hoc valore in aequatione inuenta prodibit $e^{-\alpha t}(f - c\kappa^2 PQ \frac{-\alpha^2 c\kappa^2 pq}{1+\alpha\alpha}) = \frac{c\kappa^2 pq(y - \alpha x)}{1+\alpha\alpha}$; ex qua valor anguli t erutus et in tempus conuerſus praebebit momentum maximi caloris a meridie computando.

§. 16. Cum igitur calor tempore ſolis occaſus ſit repertus, quem ponamus breuitatis gratia $= h$, quantum iſte calor ſequente nocte diminuatur, inueſtigemus. Verſetur itaque ſol poſt occaſum in V, et ponatur angulus $OPV = t$, et calor tum ſit $= z$, dum ergo ſol per arculum Vv progreditur erit decrementum caloris $dz = -\alpha z\, dt$, hincque $l\frac{h}{z} = \alpha t$; ex quo fiet $z = e^{-\alpha t}h$. Sequente igitur die, cum ſol iterum orietur, prodibit calor $= e^{-2\alpha(\pi - g)}h$. Per totam ergo noctem calor diminuetur, vnde quauis nocte frigus ſummum erit, quando ſol oritur.

§. 17. Cum igitur primo die tempore ortus ſolis gradus caloris fuiſſet $= e^{\alpha g}(f + c\kappa^2 npq - \frac{\alpha^2 c\kappa^2 pq}{1+\alpha\alpha}) - \frac{c\kappa^2 pq(n + \alpha m)}{1+\alpha\alpha}$; die ſequente calor tempore ortus ſolis erit $= e^{\alpha g - 2\alpha\pi}(f + c\kappa^2 npq - \frac{\alpha^2 c\kappa^2 pq}{1+\alpha\alpha}) - \frac{e^{-2\alpha(\pi - g)} c\kappa^2 pq(n - \alpha m)}{1+\alpha\alpha}$; ſi quidem ſol ponatur interea eandem declinationem conſeruare. At ſi hoc eodem ſequente die calor tempore meridiei ponatur Φ, debebit calor tempore ortus eiusdem diei eſſe $= e^{\alpha g}(\Phi + c\kappa^2 npq - \frac{\alpha^2 c\kappa^2 pq}{1+\alpha\alpha}) - \frac{c\kappa^2 pq(n + \alpha m)}{1+\alpha\alpha}$ vnde prodibit

$\Phi +$

$$\frac{\Phi + c\varkappa^2 npq - \frac{\alpha^2 c\varkappa^2 pq}{1+\alpha\alpha} - \frac{e^{-\alpha g} c\varkappa^2 pq(n+\alpha m)}{1+\alpha\alpha}}{(f + c\varkappa^2 npq - \frac{\alpha^2 c\varkappa^2 pq}{1+\alpha\alpha}) - \frac{e^{\alpha g - 2\alpha\pi} c\varkappa^2 pq(n-\alpha m)}{1+\alpha\alpha}} = e^{-2\alpha\pi}$$

§. 18. Si ſol perpetuo eandem declinationem conſeruaret, tum quoque perpetuo eadem diei hora idem gradus caloris haberetur. Hoc igitur caſu foret $\Phi = f$, atque calor tempore ortus ſolis primo die aequalis calori ſequentis diei eodem tempore. Hinc igitur erit $e^{\alpha g}(1 - e^{-2\alpha\pi})(f + c\varkappa^2 npq - \frac{\alpha^2 c\varkappa^2 pq}{1+\alpha\alpha}) = \frac{c\varkappa^2 pq(n + \alpha m - e^{-2\alpha(\pi - g)}(n - \alpha m))}{1+\alpha\alpha}$ atque calor meridianus, qui erit conſtans, definietur $f = \frac{c\varkappa^2 pq(e^{-\alpha g}(n + \alpha m) - e^{\alpha g - 2\alpha\pi}(n - \alpha m))}{(1 - e^{-2\alpha\pi})(1 + \alpha\alpha)} - c\varkappa^2 npq + \frac{\alpha^2 c\varkappa^2 pq}{1+\alpha\alpha}$. Sub aequatore ergo, ob $P = 0$, et $p = 1$, itemque $m = 1$ et $n = 0$, hincque $g = \frac{\pi}{2}$ foret conſtans calor meridianus $f = \frac{\alpha c\varkappa^2 q e^{-\frac{\alpha\pi}{2}}}{(1+\alpha^2)(1 - e^{-\alpha\pi})} + \frac{\alpha^2 c\varkappa^2 q}{1+\alpha\alpha}$.

§. 19. Formulae iſtae tantopere ſunt compoſitae et perplexae; vt ex iis vix quicquam concludi queat Huius autem incommodi ratio in eo eſt poſita, quod amplitudo ortiua et occidua in eas ingrediatur, atque lex continuitatis ſit interrupta: quoniam pro nocte alio ſim vſus calculo alio pro die. Quamobrem vt aliquid ad vtilitatem deriuare queamus, neceſſe eſt aliquantum a veri ſimilitudine recedere, atque continuam legem aſſumere, ſecundum quam gradus caloris mutentur. Ita cum calores ſolis ſupra horizontem exiſtentis ſint ſinibus altitudinum proportionales; eadem lege oportebit calorem ſolis naturalem ſub horizonte latentis negatiuum ſtatuere, ac ſinui depreſſionis ſub horizonte proportionalem.

 §. 20.

§. 20. Hac autem admiſſa hypotheſi facile perſpicitur concluſiones inde deducendas veritati minus fore conſentaneas, eo quod ſoli hoc pacto, quando ſub horizonte verſatur, non ſolum omnis effectus ad calorem generandum adimatur, ſed etiam vis contraria frigorifica tribuatur. Qua quidem in re experientia aduerſari videtur, cum ſol ſub horizonte calori praeſenti plus nocere non poſſit, quam ſi prorſus ab eſſet; at dum ipſum horizontem occupat, iam perinde eſt, ac ſi prorſus foret ſublatus. Quicquid autem ſit, conueniet ex hac hypotheſi conſequentias formare, quae nihilominus aliquam vtilitatem habere poterunt, cum iam ante pateat, qua in parte concluſiones ab experientia diſſentire debeant.

§. 21. Quoniam hoc pacto continuitatis lex obſervatur, ex aequatione ſupra inuenta $z = e^{-\alpha t}(f - c\varkappa^2 PQ - \frac{\alpha^2 c\varkappa^2 pq}{1+\alpha\alpha}) + c\varkappa^2 PQ + \frac{\alpha c\varkappa^2 pq(x+\alpha y)}{1+x^2}$, quae praebet calorem poſt meridiem tempore t, exiſtente calore meridiano $= f$, etiam gradus caloris nocturni poterunt determinari. Ita ſequente media nocte ob $t = \pi$ et $x = 0$, $y = -1$, erit gradus caloris $= e^{-\alpha\pi}(f - c\varkappa^2 PQ - \frac{\alpha^2 c\varkappa^2 pq}{1+x\alpha}) + c\varkappa^2 PQ - \frac{\alpha^2 c\varkappa^2 pq}{1+\alpha\alpha}$. Sequentis autem diei meridie erit calor $= e^{-2\alpha\pi}(f - c\varkappa^2 PQ - \frac{\alpha^2 c\varkappa^2 pq}{1+\alpha\alpha}) + c\varkappa^2 PQ + \frac{\alpha^2 c\varkappa^2 pq}{1+x\alpha}$, ob $t = 2\pi$ et $x = 0$, $y = 1$.

§. 22. Incrementum ergo caloris, a meridie primi diei ad meridiem ſequentem erit $= (1 - e^{-2\alpha\pi})(c\varkappa^2 PQ + \frac{\alpha^2 c\varkappa^2 pq}{1+\alpha\alpha} - f)$. Si ergo ſol perpetuo eandem declinationem retineret, foret etiam quotidie eadem ſemper caloris conditio, atque meridianus calor conſtans. Hoc itaque caſu erit calor meridianus $f = c\varkappa^2(PQ + \frac{\alpha^2 pq}{1+\alpha\alpha})$. Singulis ergo

diebus

diebus, cum maximus calor incidat, quando eſt $e^{-\alpha t}(f - c\varkappa^2 PQ - \frac{\alpha^2 c\varkappa^2 pq}{1+\alpha\alpha}) = \frac{c\varkappa^2 pq(y-\alpha x)}{1+\alpha\alpha}$ incidet noſtro caſu maximus calor poſt meridiem, quando fit $y = \alpha x$ ſeu $\frac{x}{y} = \frac{1}{\alpha}$: atque ipſe calor maximus erit $= c\varkappa^2 (PQ + \frac{\alpha pq}{\sqrt{(1+\alpha\alpha)}}$; hoc eſt quando ſol iam tantum meridianum eſt transgreſſus, vt ſit anguli APS tangens $= \frac{1}{\alpha}$. Quare cum maximus calor circiter in horam tertiam pomeridianam incidere obſeruetur, idque tum quando aeſtas maxime eſt aequabilis, erit proxime $\alpha = 1$.

§. 23. Cum igitur, ſole eandem declinationem conſeruante, incrementum caloris meridiani vno die ſit $= (1 - e^{-2\alpha\pi})(c\varkappa^2 PQ + \frac{\alpha^2 c\varkappa^2 pq}{1+\alpha\alpha} - f)$, erit incrementum duobus diebus acquiſitum $= (1 - e^{-4\alpha\pi})(c\varkappa^2 PQ + \frac{\alpha^2 c\varkappa^2 pq}{1+\alpha\alpha} - f)$, atque generaliter incrementum n diebus acquiſitum erit $= (1 - e^{-2n\alpha\pi})(c\varkappa^2 PQ + \frac{\alpha^2 c\varkappa^2 pq}{1+\alpha\alpha} - f)$. Cum igitur ſol tempore vnius diei circiter $\frac{1}{365}$ partem ecclipticae percurrat; n diebus conficiet $\frac{n}{365}$ partes; hoc eſt angulum $\frac{2\pi n}{365}$; denotante π angulum 180. graduum. Tempore ergo, quo ſol ecclipticae arculum ds percurrit, ob $n = \frac{365 ds}{2\pi}$, erit incrementum caloris meridiani $= (1 - e^{-365\alpha ds})(c\varkappa^2 PQ + \frac{\alpha^2 c\varkappa^2 pq}{1+\alpha\alpha} - f)$; puta in eadem eleuatione poli, vbi tum eſt meridies.

§. 24. Quoniam autem propter exponentem $365\alpha ds$ infinite paruum eſt $e^{-365\alpha ds} = 1 - 365\alpha ds$, erit, dum ſol per arculum ecclipticae ds progreditur, exiſtente tota ecclipticae circumferentia $= 2\pi$, incrementum caloris meridiani $= 365\alpha ds(c\varkappa^2 PQ + \frac{\alpha^2 c\varkappa^2 pq}{1+\alpha\alpha} - f)$; in qua expreſſione denotat α numerum vnitati prixime aequalem; c

gradum caloris conſtantem in ſuperficie ſolis; P eleuationis poli in loco propoſito ſinum, Q ſinum declinationis ſolis borealis; atque p et q coſinus ſinibus P et Q reſpondentes. Denique $\varkappa$ eſt tangens ſemidiametri ſolis apparentis, atque f denotat ipſum calorem meridianum tempore oblato.

Tab. I. fig. 2. §. 25. Denotet ergo AVB aequatorem, et EVL ecclipticam, interſectio V aequinoctium vernum atque P polum loci propoſiti. Verſetur ſol in S poſt aequinoctium vernum, et ponatur arcus $VS = s$ exiſtente tota ecclipticа $= 2\pi$; atque ſit arcus VS ſinus $= u$; anguſque SVT, qui eſt 23° 29′, ſinus $= m$; calor meridianus autem, dum ſol in S verſatur $= r$. His poſitis erit $Q = mu$, et $q = \sqrt{(1 - m^2 uu)}$; ac dum ſol per arculum ds progreditur erit incrementum caloris meridiani $dr = 365\, \alpha ds \left(c\varkappa^2 mPu + \frac{\alpha^2 c\varkappa^2 p\sqrt{(1-m^2uu)}}{1+\alpha\alpha} - r\right)$ exiſtente $ds = \frac{du}{\sqrt{(1-uu)}}$. Ponatur breuitatis gratia n pro numero $365\,\alpha$ erit $dr + nrds = \left(c\varkappa^2 mPu + \frac{\alpha^2 c\varkappa^2 p\sqrt{(1-m^2uu)}}{1+\alpha\alpha}\right) nds.$

§. 26. Poſtrema haec aequatio integrata dabit $e^{ns} r = c\varkappa^2 n \int e^{ns} ds \left(mPu + \frac{\alpha^2 p\sqrt{(1-m^2uu)}}{1+\alpha\alpha}\right) = \frac{c\varkappa^2 mnP}{1+nn} e^{ns} (nu - \sqrt{(1-uu)}) + \frac{\alpha^2 c\varkappa^2 np}{1+\alpha\alpha} \int e^{ns} ds \sqrt{(1-m^2u^2)}$. Ad integrale poſterioris membri inueniendum oportet noſſe, eſſe $\int e^{ns} u^\nu$

$$ds = \frac{e^{ns} u^{\nu-1} (nu - \nu\sqrt{(1-uu)}) + \nu(\nu-1) \int e^{ns} u^{\nu-2} ds}{nn + \nu\nu};$$

vnde eſt $\int e^{ns} ds = \frac{e^{ns}}{n}$; $\int e^{ns} u^2 ds = \frac{e^{ns} u (nu - 2\sqrt{(1-uu)}) + \frac{2}{n} e^{ns}}{4 + nn}$

$$= \frac{e^{ns} (2 + n^2u^2 - 2nu\sqrt{(1-uu)})}{n(4+nn)}; \int e^{ns} u^4 ds =$$

$$\frac{e^{ns}u^3(uu-4\sqrt{(1-uu)})+\dfrac{12e^{ns}}{n(4+nn)}(2+n^2u^2-2nu\sqrt{(1-uu)})}{16+nn}$$

$$=\frac{e^{ns}(24+12n^2u^2+4n^2u^4+n^4u^4-4nu(6+4uu+nnuu)\sqrt{(1-uu)})}{n(4+nn)(16+nn)}$$

atque ita porro.

§. 27. Quoniam ergo eſt $\sqrt{(1-m^2u^2)}=1-\frac{m^2u^2}{2}-\frac{m^4u^4}{8}-$ etc. erit $\int e^{ns}ds\sqrt{(1-m^2u^2)}=e^{ns}\left(\frac{1}{n}-\frac{mm(2+nnuu-2nu\sqrt{(1-uu)})}{2n(4+nn)}-\frac{m^4}{8}\right.$ $\frac{(24+12n^2u^2+4n^2u^4+n^4u^4-4nu(6+4u+nnuu)\sqrt{(1-uu)})}{n(4+nn)(16+nn)}$ $\left.-\text{etc.}\right)+$ conſt. Ponamus $s=0$, erit $u=0$ et $\sqrt{(1-uu)}=1$; fietque calor meridianus in aequinoctio verno $r=C-\frac{c\varkappa^2 mnP}{1+nn}+\frac{\alpha^2c\varkappa^2np}{1+\alpha\alpha}\left(\frac{1}{n}-\frac{mm}{n(4+nn)}-\frac{3m^4}{n(4+nn)(16+nn)}-\frac{45m^6}{n(4+nn)(16+nn)(36+nn)}-\text{etc.}\right)$ At poſito $s=2\pi$, r denotabit calorem meridianum in ſequente aequinoctio verno, ita vt ſit $e^{2n\pi}r=C-\frac{c\varkappa^2mnPe^{2n\pi}}{1+nn}+\frac{\alpha^2c\varkappa^2npe^{2n\pi}}{1+\alpha\alpha}\left(\frac{1}{n}-\frac{m^2}{n(4+nn)}-\frac{3m^4}{n(4+nn)(16+nn)}-\text{etc.}\right)$

§. 28. Cum autem poſt innumerabiles reuolutiones ſolis perpetuo idem calor meridianus in aequinoctium vernum incidere debeat, oportebit quantitatem conſtantem C eſſe $=0$; ſi pro loco propoſito ponatur calor meridianus in aequinoctio verno $=a$, erit $a=\frac{\alpha^2c\varkappa^2p}{1+\alpha\alpha}\left(1-\frac{m^2}{4+n^2}-\frac{3m^4}{(4+n^2)(16+n^2)}-\text{etc.}\right)-\frac{c\varkappa^2mnP}{1+nn}$. Atque dum ſol in loco quocunque S ecclipticae verſatur, erit calor me-

ridianus $r = \frac{\alpha^2 cx^2 p}{1+\alpha x}\left(1 - \frac{m^2(2+n^2u^2-2nu\sqrt{(1-uu)})}{2(4+nn)} - \frac{m^4(24+10n^2u^2+4n^2u^4+n^4u^4}{8(4+nn)}\right.$ $\left.- \frac{4nu(6+\cdots+nnuu)\sqrt{(1-uu)}}{(16+nn)}\right) + \frac{cx^2 mnP(nu-\sqrt{(1-uu)})}{1+nn}$.

§. 29. Cum n ſit numerus valde magnus, quippe proxime aequalis numero 365, ob $\alpha = 1$, atque m numerus vnitate minor, ſcilicet $= 0,3982823$. pro dato terrae loco ad quemuis anni cuiusque diem proxime poterit definiri calor meridianus. Aequinoctio nimirum verno erit calor meridianus $\frac{\alpha^2 cx^2 p}{1+\alpha\alpha} - \frac{cx^2 mnP}{1+nn}$: aequinoctio vero autumnali erit calor meridianus $= \frac{\alpha^2 cx^2 p}{1+\alpha\alpha} + \frac{cx^2 mnP}{1+nn}$. At ſolſtitio aeſtiuo habebitur calor meridianus $= \frac{\alpha^2 cx^2 p}{1+\alpha\alpha}\left(1 - \frac{m^2 n^2}{2(4+nn)} - \frac{m^4 n^4}{8(4+nn)(16+nn)} - \text{etc.}\right) + \frac{cx^2 mn^2 P}{1+nn} = \frac{\alpha^2 cx^2 p\sqrt{(1-mm)}}{1+\alpha\alpha} + \frac{cx^2 mn^2 P}{1+nn}$; atque ſolſtitio hyemali erit calor meridianus $= \frac{\alpha^2 cx^2 p}{1+\alpha\alpha}\left(1 - \frac{m^2 n^2}{2(4+nn)} - \text{etc.}\right) - \frac{cx^2 mn^2 P}{1+nn} = \frac{\alpha^2 cx^2 p\sqrt{(1-mm)}}{1+\alpha x} - \frac{cx^2 mn^2 P}{1+nn}$, neglectis terminis nimium exiguis.

§. 30. Sub aequatore ergo eſt calor meridianus in aequinoctio verno $= \frac{cx^2}{2}$, in ſolſtitio aeſtiuo $= \frac{cx^2}{2} - \frac{cx^2 m^2 n^2}{4(4+nn)}$; in aequinoctio autumnali $= \frac{cx^2}{2}$; et in ſolſtitio hyemali $= \frac{cx^2}{2} - \frac{cx^2 m^2 n^2}{4(4+nn)}$. At ſub eleuatione poli 60°; erit calor meridianus in aequinoctio verno $\frac{cx^2}{4} - \frac{cx^2 mn\sqrt{3}}{2(1+nn)}$; in ſolſtitio aeſtiuo $= \frac{cx^2}{4} - \frac{cx^2 m^2 n^2}{8(4+nn)} + \frac{cx^2 mn^2\sqrt{3}}{2(1+nn)} = \frac{cx^2\sqrt{1-mm}}{4} + \frac{cx^2 mn^2\sqrt{3}}{2(1+nn)}$; in aequinoctio autumnali $= \frac{cx^2}{4} + \frac{cx^2 mn\sqrt{3}}{2(1+nn)}$, et in ſolſtitio hyberno $= \frac{cx^2}{4} - \frac{cx^2 m^2 n^2}{8(4+nn)} - \frac{cx^2 mn^2\sqrt{3}}{2(1+nn)} = \frac{cx^2\sqrt{1-mm}}{4} - \frac{cx^2 mn^2\sqrt{3}}{2(1+nn)}$. Sub ipſo denique polo boreali erit calor in aequinoctio verno $= \frac{-cx^2 mn}{1+nn}$; in ſolſtitio aeſtiuo $= \frac{cx^2 mn^2}{1+nn}$; in aequinoctio autumnali $= \frac{cx^2 mn^2}{1+nn}$; atque in ſolſtitio hyberno $= \frac{-cx^2 mn^2}{1+nn}$: in quibus formulis denotat $n = 365$, cum poſuerimus $\alpha = 1$.

§. 31.

§. 31. Ex formula inuenta intelligitur, calorem meridianum non fore maximum ipſo ſolſtitio aeſtiuo, neque minimum ſolſtitio hyberno; ſed aliquantum poſt has tempeſtates incidere. Quod tempus vt definiatur pro quavis eleuatione poli, quaeratur, quando fiat $dr = 0$. Hoc autem euenit, cum ſit $r = c\varkappa^2 m\,\mathrm{P}u + \frac{\alpha^2 c\varkappa^2 p\sqrt{(1-m^2u^2)}}{1+\alpha\alpha}$: erit ergo $c\varkappa^2 m\,\mathrm{P}u + \frac{\alpha^2 c\varkappa^2 p\sqrt{(1-m^2u^2)}}{1+\alpha\alpha} = \frac{\alpha^2 c\varkappa^2 p\sqrt{(1-m^2u^2)}}{1+\alpha\alpha} + \frac{c\varkappa^2 mn\mathrm{P}(nu-\sqrt{(1-uu)})}{1+nn}$; eſt enim proxime $r = \frac{\alpha^2 c\varkappa^2 p\sqrt{(1-m^2u^2)}}{1+\alpha\alpha} + \frac{\alpha^2 c\varkappa^2 pm^2\sqrt{(1-uu)}}{(1+\alpha^2)n\sqrt{(1-m^2u^2)}} + \frac{c\varkappa^2 mn\mathrm{P}(nu-\sqrt{(1-uu)})}{1+nn}$; generaliter ſumendis iis tantum terminis, in quibus n plurimas habet dimenſiones.

§. 32. Ad tempus igitur definiendum, quo calor meridianus eſt maximus, iſta habetnr aequatio $u = -n\sqrt{(1-uu)}$ et $\frac{u}{\sqrt{(1-uu)}} = -n$ ergo $u = \frac{n}{\sqrt{(1+nn)}}$ et $\sqrt{(1-uu)} = \frac{1}{\sqrt{(1+nn)}}$. Maximus ergo calor meridianus, pariter ac maximum frigus incident poſt ſolſtitia; at diſcrimen ne vnicum quidem diem adaequat, ita vt ſatis tuto ipſa ſolſtitia pro momentis, in quibus calor meridianus tum ſit maximus tum minimus, haberi queant. Quodſi cum obſeruationibus minus congruat, id hypotheſi a veritate nimium aberranti eſt tribuendum. Vi hypotheſis enim in ſolſtitio aeſtiuo calor per noctem minime diminuitur, per diem autem maxime augetur.

§. 33. Quoniam calor meridianus ſub aequatore non multum variatur per anni tempeſtates, ex eo commodiſſime calor in ſuperficie ſolis poterit determinari. Denotet enim i maximum calorem meridiunum ſub aequatore obſeruatum, qui cum ſit $= \frac{c\varkappa^2}{2}$, erit $c = \frac{2i}{\varkappa^2}$. At cum $\varkappa$ ſit tangens ſemidiametri ſolis apparentis, ſi pro $\varkappa$ ſumatur

matur

matur tangens 16′, fiet $c = 92328\, i$; ita vt calor in ſuperficie ſolis propemodum ſit centies millies maior, quam ſummus calor tempore meridiei, ſub ipſo aequatore. Verum vt ratio multiplicationis caloris pateat, notandum eſt, ſummum calorem meridianum ſub aequatore duplo maiorem eſſe, quam medium gradum caloris, inter gradus caloris meridiani aequinoctialis verni et autumnalis, ſub eleuatione poli 60°.

§. 34. Qui formulas datas contemplabitur, mox perſpiciet, ſummum calorem meridianum neque ſub aequatore neque ſub polis deprehenſum iri. Quamobrem operae pretium erit illas regiones terrae determinare, in quibus tempore ſolſtitii aeſtiui maximus obſeruari debeat calor. Calculo vero ſubducto reperietur harum regionum eleuatio poli 41. graduum: fieri enim debet $\frac{P}{p} = \frac{2m}{\surd(1-mm)}$. His vero regionibus erit calor meridianus in ſolſtitio aeſtiuo $= \frac{cx^2\surd(1+mm)}{2} = \frac{1{,}215\, cx^2}{2}$, cum ſummus calor meridianus ſub aequatore ſit $= \frac{cx^2}{2}$.

§. 35. Hinc igitur ſequentem tabellam deduxi, in qua pro variis poli eleuationibus conſpiciuntur gradus caloris meridiani, tempore tam aequinoctiorum quam ſolſtitiorum.

Calor meridianus.

Eleuatio Poli.	Aeq. Verno	Solſtit. Aeſt.	Aeq. Aut.	Solſtit. hyb.
0°	0, 500	0, 459	0, 500	0, 459
10°	0, 492	0, 521	0, 492	0, 382
20°	0, 469	0, 567	0, 470	0, 295
30°	0, 432	0, 596	0, 434	0, 198
40°	0, 382	0, 607	0, 384	0, 095
50°	0, 321	0, 600	0, 322	-0, 010
60°	0, 249	0, 574	0, 251	-0, 115
70°	0, 170	0, 531	0, 172	-0, 218
80°	0, 085	0, 472	0, 088	-0, 313
90°	-0, 001	0, 398	0, 001	-0, 398

§. 36. Cum autem hac theoria pro quouis loco ſolis in eccliptica detur calor meridianus, r ita vt ſit $r = \frac{c\varkappa^2 \sqrt{(1-n^2u^2)}}{2} + \frac{c\varkappa^2 pm^2u\sqrt{(1-uu)}}{2n\sqrt{(1-m^2u^2)}} + \frac{c\varkappa^2 mnP(nu-\sqrt{(1-uu)})}{1+nn}$. Hoc ergo die tempore t poſt meridiem erit calor $= e^{-\alpha t}c\varkappa^2 \left(\frac{pm^2u\sqrt{(1-uu)}}{2n\sqrt{(1-m^2u^2)}} - \frac{mnP\sqrt{(1-uu)}}{1+nn}\right) + c\varkappa^2 mPu + \frac{c\varkappa^2 p(x+y)\sqrt{(1-m^2u^2)}}{2}$ ſeu neglectis terminis qui per n ſunt diuiſi erit calor iſte $Z = c\varkappa^2 \left(mPu + \frac{p(x+y)\sqrt{(1-m^2u^2)}}{2}\right)$; vnde ſequitur maximum cuiusuis diei calorem incidere in horam tertiam pomeridianam: ideo quia poſuimus $\alpha = 1$. Nam ſi α maius foret, maximus calor propius ad meridiem incideret.

§. 37. Quamobrem ſi longitudinis ſolis ſinus ponatur $= u$; atque P deſignet ſinum eleuationis poli, p eius coſinum; ac m ſinum inclinationis eclipticae ad aequatorem: erit pro dato loco

	Calor.
Meridie	$cx^2(mPu + \frac{p\sqrt{(1-m^2u^2)}}{2})$
hora 3.	$cx^2(mPu + \frac{p\sqrt{(1-m^2u^2)}}{\sqrt{2}})$
hora 6	$cx^2(mPu + \frac{p\sqrt{(1-m^2u^2)}}{2})$
hora 9	$cx^2(mPu + 0)$
hora 12	$cx^2(mPu - \frac{p\sqrt{(1-m^2u^2)}}{2})$
mane	
hora 3	$cx^2(mPu - \frac{p\sqrt{(1-m^2u^2)}}{\sqrt{2}})$
hora 6	$cx^2(mPu - \frac{p\sqrt{(1-m^2u^2)}}{2})$
hora 9	$cx^2(mPu - 0)$
hora 12	$cx^2(mPu + \frac{p\sqrt{(1-m^2u^2)}}{2})$

§. 38. Hinc autem clariſſime inſufficientia huius hypotheſis elucet, cum ſub aequatore ipſo media nocte maius frigus deberet regnare, quam rigidiſſima hyeme ſub polis. Cauſa quidem huius abſurdi ſponte ſe offert, quoniam ſecundum theoriam ſub aequatore tempore nocturno calor maxime imminui debeat, eo quod ſoli ſub horizonte latenti adeo vim frigefaciendi tribuimus, eamque eo maiorem, quo profundius ſit ſubmerſus: in zona autem torrida profundiſſime ſubmergitur. Quocirca iſta theoria correctione indiget maxima, ſi quidem ad obſervationes accommodari debeat.

§. 39. Ob has difficultates tentabo rem expedire per priorem hypotheſin, quae veritati magis eſt conſentanea; manentibus ergo poſtremis denominationibus, praeterquam quod r denotet gradum caloris tempore ortus ſolis, reperietur haec aequatio $dr + nrds =$

$$\frac{cx^2ne^{-2\alpha\pi}ds(mPu(e^{2\alpha g}-1)+\alpha(1+e^{-\alpha g})\sqrt{(p^2-m^2u^2)}}{(1+\alpha\alpha)(1-e^{-2\alpha\pi})}$$ vbi g denotat

notat arcum, cuius ſinus eſt $\frac{\sqrt{(p^2-m^2u^2)}}{p\sqrt{(1-m^2u^2)}}$ Ex qua aequatione, cum n ſit numerus tam magnus ſcilicet 365, erit proxime $r = \frac{c\varkappa^2}{1+\alpha\alpha} \frac{e^{-2\alpha\pi}(mPu(e^{2\alpha g}-1)+\alpha(e^{2\alpha g}+1)\sqrt{(p^2-m^2u^2)})}{(1-e^{-2\alpha\pi})}$

vnde reperitur calor meridianus $f = \frac{c\varkappa^2 e^{-\alpha g}}{1+\alpha^2}.$
$\left(\frac{(e^{2\alpha g-2\alpha\pi}-1)mPu+(e^{2\alpha g-2\alpha\pi}+1)\alpha\sqrt{(p^2-m^2u^2)}}{1-e^{-2\alpha\pi}}\right) + c\varkappa^2 mPu$
$+ \frac{\alpha^2 c\varkappa^2 p\sqrt{(1-m^2u^2)}}{1+\alpha\alpha}$. Calor in occaſu erit $=$
$\frac{c\varkappa^2 e^{-2\alpha g}((e^{2\alpha g}-1)mPu+(e^{2\alpha g}+1)\alpha\sqrt{(p^2-m^2u^2)})}{(1+\alpha^2)(1-e^{-2\alpha\pi})}$, ergo quouis die ſe habet calor ortus ad calorem occaſus vt $e^{-2\alpha\pi}$ ad $e^{-2\alpha g}$ ſeu vt $e^{2\alpha g}$ ad $e^{2\alpha\pi}$; quo breuiores ergo ſunt dies, eo maior eſt differentia inter gradus caloris in ortu et occaſu.

§. 40. Poſt meridiem ergo tempore t quod in arcum aequatoris conuerſum dat angulum t, erit calor in regione propoſita $z = \frac{c\varkappa^2 e^{-\alpha(t+g)}}{(1+\alpha^2)(1-e^{-2\alpha\pi})} \left((e^{2\alpha(g-\pi)}-1)Pu\right)+(e^{2\alpha(g-\pi)}$
$+1)\alpha\sqrt{(p^2-m^2u^2)}\Big)+c\varkappa^2 mPu+\frac{\alpha c\varkappa^2 p(x+\alpha y)\sqrt{(1-m^2u^2)}}{1+\alpha^2}$, vbi u denotat ſinum longitudinis ſolis; x ſinum anguli t et y coſinum ipſius: g vero angulum cuius ſinus eſt $\frac{\sqrt{(p^2-m^2u^2)}}{p\sqrt{(1-m^2u^2)}}$ et coſinus $= \frac{-mPu}{p\sqrt{(1-m^2u^2)}}$ ſeu $g = \frac{\pi}{2} +$ Ar. ſin. $\frac{mPu}{p\sqrt{(1-m^2u^2)}}$ vel $dg = \frac{mPdu}{(1-m^2u^2)\sqrt{(p^2-m^2u^2)}}$.

DE MOTIBVS OSCILLATORIIS CORPORVM HVMIDO INSIDENTIVM.

AVCTORE
Daniele Bernoulli.

§. 1.

Communicaui non ita pridem cum Academia diſſertationem de ſtatu aequilibrii corporum humido inſidentium, quae prius eſt perlegenda quam praeſentis argumenti disquiſitio ſuscipiatur: ſunt enim prioris diſſertationis propoſitiones fere totidem lemmata hisce disquiſitionibus, alias non parum nodoſis, felicem exitum praeparantia: quapropter praemiſſa iſta omnia, vt huius diſſertationis partem facientia conſiderari, ſimulque tres figuras, vt ibi fuerunt explicatae atque adhibitae, rurſus adhiberi velim.

§. 2.

Ordinem hic ſeruabo, quem in priori diſſertatione adhibui: prius ſcilicet de planis humido verticaliter inſidentibus dicam, deinde de corporibus qualibuscunque; in priori autem caſu oscillationes fieri in ipſo plano propoſito putabimus. Intelligo autem per oſcillationes motus reciprocos, quos facit planum, ſiue corpus ex ſtatu aequilibrii firmi deturbatum, ſibique poſtea relictum. Hi motus eo fient frequentiores, quo firmius habent aequilibrium, cum ſunt in ſtatu aequilibrii poſita. Sunt autem motus iſti reciproci duplicis generis: alii ſunt iſochroni, alii tales non ſunt: de oſcillationibus iſochronis potiſſimum agere

agere conſtitui : ſed iſochronae eſſe nequeunt, niſi excurſiones angulares veluti infinite paruae conſiderentur : igitur ſitus omnes corporis, tanquam ſitui aequilibrii proximos, conſiderabimus.

§. 3.

Sit nunc vt in praemiſſa diſſertatione, M Q ſuperficies fluidi, cui planum graue F E G (fig. 3 et 4) inſidet, quod ſic in ſtatu aequilibrii poſitum putetur. Sit porro A centrum grauitatis totius plani et B centrum grauitatis homogeneae partis ſubmerſae. Concipiatur rurſus vectis verticalis AR eiusque longitudo ponatur $= 1$, intelligendo ſimul per vnitatem ſinum totum: um in punctis A et R applicatae intelligantur potentiae minimae contrariae et aequales, horizontales et ipſi plano parallelae: iſtae potentiae planum declinabunt in ſitum proximum feg, perveniente puncto R in r, A in a, B in b; eritque angulus $r a$ R angulus minimus inclinationis, cuius ſinum vocauimus α: his ita poſitis, biſectaque recta F G in puncto H, demonſtrauimus §. 9. praemiſſae diſſertationis, fore Tab. I.

$$A a = HN \times \alpha$$
$$B c = HN \times \alpha$$
$$b c = [AB + \frac{FG^3}{12M}) \alpha$$

vbi M ſignificat maſſam ſiue pondus totius plani, quod exprimi debet per magnitudinem partis ſubmerſae.

Deinde demonſtrauimus quoque §. 11. fore quamuis potentiam planum declinantem $= [AB \times M + \frac{1}{12} FG^3] \alpha$.

 §. 4.

§. 4.

Iam vero nobis duo ab inuicem diſtinguendi veniunt caſus, quorum *primus* eſt, quum eſt $Aa = o$, id eſt, cum ab mutato plani ſitu, centrum grauitatis plani, ſitum non mutat, isque obtinet, cum linea verticalis A R ſecat lineam F G bifariam, quia tunc fit $HN = o$; *ſecundus* caſus eſt, vbi contrarium fit. In primo caſu planum durante ſitus ſui mutatione ſimpliciter circa ſuum centrum grauitatis rotatur, et ſtatim ac potentiae agere ceſſant, planum motibus reciprocis circa centrum grauitatis agitabitur. In altero caſu ceſſantibus potentiis, planum motu agitabitur mixto, altero oſcillatorio et rotatorio circa centrum grauitatis, altero verticali et parallelo, quo planum alternis vicibus deſcendit atque aſcendit. In priori caſu oſcillationes plani omnes, ſiue maiores ſiue minores ſunt neceſſario iſochronae; at vero in caſu ſecundo agitationes non niſi certo in caſu ſunt iſochronae; niſi enim ambo motus, ex quibus iſtae agitationes componuntur, inter ſe tautochroni fiant, vt eodem abſoluantur tempore, non posſunt non agitationes eſſe valde irregulares. Vt ordine procedam, incipiam a caſu priori, cui ſequens inſeruiet lemma.

§. 5.

Lemma.

Quum planum F E G potentia vtcunque applicata circa punctum A mouetur, motus eadem fiet lege, ac ſi illi plano ſubſtituatur punctum graue in R, cuius maſſa ita fuerit determinata. Sumatur nempe aggregatum ſingularum particularum planum componentium multiplicatarum per quadratum ſuae diſtantiae a puncto A et diuiſarum per quadratum A R.

De-

Demonſtrationem huius lemmatis dedi in diſſertatione *de motu corporum a percuſſione excentrica*. §. 5. *vid Comm. Tom.* IX. *p.* 191. ſi itaque centro A ducantur duo circuli infinite propinqui, et dicatur circuli interioris radius x atque maſſula plani inter duos circulos intercepti $d\zeta$ erit, ob $AR = 1$, maſſa in R ſubſtituenda $= \int xx\,d\zeta$.

§. 6.

Cum R ſit punctum ad libitum ſumendum, poterit ita locari, vt maſſa in R ſubſtituenda ſit praeciſe maſſae plani aequalis, id eſt, vt $\int xx\,d\zeta = M$. De iſto puncto plurimas proprietates demonſtraui in diſſertatione *de mutua relatione centri virium, centri oſcillationis et centri grauitatis*, *vid. Comm. Tom.* 2. *p.* 208. vbi punctum R hac lege determinatum voco centrum virium viuarum. Inter alias proprietates vna eſt, quae huc maxime facit, quamque notatu plane dignam puto: nempe *ſi punctum rotationis A eſt in ipſo centro grauitatis, vti hic eſt, fore tunc oſcillationes plani, ex puncto R verticaliter ſuſpenſi, brachyſtochronas, id eſt, minoris durationis, quam ſi planum ex quouis alio puncto ſuſpendatur. vid. p.* 214.

Poteſt itaque longitudo A R in quouis plano vtcunque graui, iteratis experimentis ſine calculo proxime explorari, imo poteſt vnico experimento inueniri hunc in modum: *aſſumatur punctum quodcunque, ex quo planum ſuſpendatur atque deinde oſcilletur, erit A R aequalis mediae proportionali inter diſtantiam puncti aſſumti a centro grauitatis et diſtantiam centri oſcillationis a centro grauitatis. vid. p.* 212.

Longitudinem autem A R hac lege determinatam, vocabo *longitudinem brachyſtochronam*, eamque porro deſignabo per vnitatem.

§. 7.

§. 7.

Lemma.

Sit longitudo penduli alicuius ſimplicis $= L$, diſtantia minima puncti grauis oſcillantis a puncto infimo $= \alpha$, erit vis acceleratrix in iſto ſitu $= \frac{\alpha}{L}$, habetur autem vis acceleratrix, ſi diuidatur potentia mobili directe applicata per maſſam eius, eruntque omnes motus oſcillatorii iſochroni, ſi in iisdem a puncto aequilibrii diſtantiis ſit vis acceleratrix eadem. Notiſſima haec ſunt in mechanicis.

§. 8.

Problema.

Inuenire longitudinem penduli iſochroni cum motibus oſcillatoriis plani F E G fluido verticaliter immerſi.

Solutio.

Sit longitudo quaeſita $= L$; ponaturque diſtantia puncti oſcillantis a puncto infimo $= \alpha$; erit vis eius acceleratrix $= \frac{\alpha}{L}$. Eſt vero potentia P planum F E G in ſitu inclinato *f e g* detinens $= [AB \times M + \frac{FG^3}{12}]\,\alpha$ per §. 3. haecque ipſa eſt, quae in plano oſcillante puncto R vel *r* applicata intelligi debet: poteſt porro maſſae plani ſubſtitui in R vel *r* punctum graue M per §. 6. eſtque diſtantia puncti *r* a puncto aequilibrii R etiam $= \alpha$, quia α ſignificat angulum *r a* R et ponitur *a* R vel A R $= 1$. Eſt ergo hic vis acceleratrix $= [AB \times M + \frac{FG^3}{12}]$ $\alpha : M$. oportet itaque per §. 7. facere $\frac{\alpha}{L} = [AB \times M + \frac{FG^3}{12}]\,\alpha : M$ et hinc fit

L =

$$L = \frac{12M}{12M \times AB + FG^3}$$

aut quia A R = 1, poteſt homogeneitatis cauſa poni

$$L = \frac{12M \times AR^2}{12M \times AB + FG^3}$$

in qua aequatione M denotat ſpatium plani ſubmerſum Q. E. I.

§. 9.

Corollarium I.

Apparet ex hac aequatione oſcillationes admodum accelerari ab aucta ſectione aquae cum plano, quae indicatur per F G, atque ſi F G ſit veluti nulla, vti eſſet in bacillis aquae ſubmerſis vel in omnibus planis fere totis ſubmerſis, quorum latitudines ſuperiora verſus decreſcunt, poſſe tunc cenſeri

$$L = \frac{AR^2}{AB}.$$

Igitur in triremibus, quae ratione molis magnam habent latitudinem in ſuperficie aquae, oſcillationes latitudinales citiores erunt, ſed ſimul minores ceteris paribus, quam in aliis nauium generibus.

§. 10.

Corollar. II.

Oſcillationes porro accelerantur ab aucto valore A B: quo humilius itaque centrum grauitatis plani poſitum eſt, eo celerius perficiuntur, ſed rurſus ceteris paribus minores.

§. 11.

Corollar. III.

Denique oſcillationes accelerantur ceteriſque paribus fiunt minores a diminuta *longitudine brachyſtochrona*. Patet autem ex conſtructione generali huius *longitudinis bra-*

chyſtochronae in fine §. 6. expoſita, quod eo minor ſit, quo magis maſſa plani eſt circa centrum grauitatis concentrata.

Hae obſeruationes regulas architecturae naualis non parum illuſtrant atque confirmant, quum de ſubuerſione nauium vitanda ſermo eſt.

Quae de planis hucusque commentati ſumus, extendi etiam poſſunt ad corpora, quae prisma rectum formant, et quorum ſtrata ad prisma perpendicularia ſimilia ſimiliterque poſita ſunt.

§. 12.

Iam vero regulas noſtras exemplis aliquibus illuſtrabo. *Exemp. I.* Sit bacillus rectus craſſitiei minimae ſed vniformis compoſitus ex duabus partibus longitudine aequalibus; ſit grauitas ſpecifica partis ſuperioris dimidia grauitatis ſpecificae alterius partis, longitudo totius bacilli ſit $= a$: putetur bacillus tantum non totus ſubmerſus exiſtente grauitate ſpecifica fluidi tantillo maior ſesquialtera grauitate ſpecifica partis leuioris bacilli.

Hic eſt $AB = \frac{a}{12}$; $FG = 0$ et $AR = a\sqrt{\frac{11}{12}}$; et inde fit $L = \frac{11}{12}a$.

Exemp. II. Habeatur (vt in priori diſſertatione §. 15.) planum quadratum aequaliter craſſum, vbique homogeneum humido verticaliter inſidens, ita vt habeat duo latera horizontalia, totidemque verticalia. Sint rurſus grauitates ſpecificae aquae et plani vt m ad n, ponaturque latus quadrati $= 2a$; quaeritur longitudo penduli iſochroni. Hic fit $FG = 2a$, initoque calculo prodit $AB = \frac{n-m}{m}a$; $M = \frac{4n}{m}aa$; $AR = a\sqrt{\frac{1}{3}}$, hisque valoribus ſubſtitutis in aequatione §. 8. oritur $L = \frac{4mna}{6nn-6mn+mm}$.

Si

Si fuerit $m = 3n \pm n\sqrt{3}$, erit $L = \infty$; ſunt enim hi duo valores quantitatis m limites, intra quos aequilibrium firmum non ſubſiſtit.

Si fuerit m tantillo maior quam n, fit $L = 4a$, atque ſi ponatur $m = 5n$, fit $L = 20a$ etc.

Exemp. III. Si pro plano aſſumatur circulus ex circulis concentricis homogeneis quidem, ſed tamen inter ſe vtcunque heterogeneis, compoſitus. Apparet planum in omni ſitu obtinere aequilibrium atque adeo pendulum iſochronum eſſe debere infinitae longitudinis, oportet itaque, vt ſit ſemper $AB = \frac{-FG^3}{12M}$: hanc proprietatem a poſteriori erutam calculo analytico, qui voluerit, confirmare poterit: proprietas autem iſta huc redit, vt ſi ſumatur ſegmentum circuli homogenei quodcunque, ſit in illo ſegmento diſtantia centri grauitatis a centro circuli aequalis parti duodecimae cubi chordae diuiſi per aream ſegmenti.

§. 13.

Venio nunc ad caſum alterum, quem §. 4. expoſui, quo ſcilicet plana motu duplici agitantur, rotatorio, quem hucusque conſiderauimus et parallelo verticali, quo planum alternis vicibus immergitur et emergitur. Iſtud alterum argumentum tot difficultatibus prima fronte intricatum apparet, vt nihil aliud de eo affirmare ab initio auſus fuerim, quam quod motus iſti reciproci admodum inaequales et irregulares eſſe debeant. Sed re attentius perpenſa, animaduerti, quod vtrumque, oſcillationis genus vtcunque ab initio irregulare tandem ad vniformem tendat ſtatum permanentem, quem accurate determinare liceat. Erunt fortaſſe, quibus argumentum iſtud tanti mo-

menti non eſſe videbitur, quod tam exquiſitum mereatur examen. Non inquiram heic momentum problematis iſtius ſpecialis, at argumentum, in ampliori extenſione conſideratum, mihi videtur vtiliſſimum et a paucis adhuc pertractatum: problema autem, quod nunc tractabimus, argumento generali lumen affundet.

§. 14.

Si habeatur ſyſtema corporum ita connexorum, vt cognito motu vnius corporis non innoteſcat ſtatim motus corporis alterius, etſi acceleratio cuiusuis corporis pendeat a ſitu corporum ſingulorum, determinatio motus ſingulorum corporum plerumque fit admodum difficilis: ſi vero motus minimi ſint et reciproci ſiue oſcillatorii, legi ſubiiciuntur fere generali, quae in hoc conſiſtit, vt motus perturbati, inaequales diuerſae durationis tendant ad ſtatum vniformem, quo ſingula corpora oſcillationes ſuas eodem perficiunt tempore et excurſiones ſuas ſimul incipiunt ſimulque finiunt. In iſto ſtatu perdurationis obtinent excurſiones ſingulae conſtantem aliquam inter ſe rationem, et diſtantiae corporum a puncto aequilibrii proportionem conſtanter eandem ſeruant, ſiue oſcillationes maiores fiant ſiue minores.

Ad hunc quidem ſtatum durationis corpora poſt tempus demum infinitum peruenire deberent; at vero ſi corporibus ſtatim ab initio talis concilietur ſitus, vt ſingulorum diſtantiae a puncto aequilibrii obtineant modo dictam proportionem conſtantem, tunc omnes ſyſtematis motus perdurabunt in eodem ſtatu eruntque inter ſe iſochroni. Haec melius intelligentur, ſi attendatur ex. gr. ad oſcillationes ſin-

ſingulares, quas corpora filo flexili connexa atque verticaliter ſuſpenſa faciunt: has oſcillationes in peculiari diſſertatione Comm. Tom. VI. inſerta conſideraui atque penitus explicaui.

Oſtendi autem in qua proportione corpora ſingula a linea verticali deduci debeant, vt deinde ſimul ſibi relicta, omnia oſcillationes ſuas ſimul perficiant: monſtraui ſimul hunc vniformitatis et durationis ſtatum tot diuerſis modis obtineri poſſe, quot corpora filo ſunt connexa, atque ſic catenam pendulam infinitis modis oſcillationes vniformes et aequabiles efficere poſſe: niſi autem corpora ſingula debita proportione ab linea verticali deducta fuerint, cum moueri incipiunt, oſcillationes ſingulae erunt irregulares, inconſtantes, perturbatae, ſed quae tamen continue magis magisque ad vniformitatis ſtatum vergent. Hae annotationes inſeruiunt ad motum tremulum chordarum ſonorarum intelligendum: poteſt enim vnius eiusdemque chordae ſonus ex multis tonis eſſe compoſitus.

§. 15.

Apparet igitur problema noſtrum iam eo eſſe deductum, vt inueniatur, in qua proportione, vtrumque oſcillationum genus fieri debeat, vt ambo eodem ſemper tempore abſoluantur. Huius problematis ſolutioni praemittendum eſt problema hoc alterum.

Problema.

Sit in fig. 3. et 4., praeter ambas potentias P, P hactenus conſideratas, potentia tertia π puncto R in directione verticali applicata et planum ſurſum trahens, ſint- Tab. I.

 que

que omnia in aequilibrio poſita, oporteatque inuenire potentias horizontales P, P et potentiam verticalem π.

Solutio.

Ponatur tres praefatae potentiae planum detinere in ſitu feg, puteturque ſic plani centrum grauitatis A perveniſſe in a, atque partis ſubmerſae centrum grauitatis homogeneae ex B perueniſſe in b: ſumaturque rurſus A R pro ſinu toto 1, ſitque ſinus anguli minimi R $ar = \alpha$, eleuatio autem minima (cuius iam maguitudo ſimul pendet a magnitudine potentiae verticalis) ſit $= \beta$. In hoc caſu notandum eſt, magnitudinem partis ſubmerſae non eandem eſſe in vtroque plani ſitu, quin emergi in ſitu feg particulam, quae eſt $= FG \times \beta - FG \times HN \times \alpha$: patet autem eſſe potentiam verticalem π ponderi huius particulae, poſt mutationem ſitus emerſae, aequalem, vnde ſtatim obtinetur

$$\pi = FG \times \beta - FG \times HN \times \alpha.$$

Quod attinet ad potentiam horizontalem P, vt haec determinetur, oportet inquirere in lineolem horizontalem bc, haecque eodem modo inuenietur, quo vſi ſumus §. IX. praecedentis diſſertationis: ſic reperietur peractis omnibus ſecundum notas ſtaticae leges

$$bc = \left(\frac{AB + \frac{1}{3} \times FN^3 + \frac{1}{3} GN^3}{M}\right)\alpha - \frac{FG \times HN \times \beta}{M}$$

Si haec conferantur porro cum §. 6. praecedentis diſſertationis, apparebit eſſe potentiam $P = \frac{bc}{AR} \times M$, ſiue $= bc \times M$: ſubſtituto igitur valore inuento lineolae bc prodibit

$$P = [AB \times M + \tfrac{1}{3} \times FN^3 + \tfrac{1}{3} \times GN^3]\alpha - FG \times HN \times \beta.$$

atque ſic ſatisfactum eſt problemati.

§. 16.

§. 16.

Putetur iam potentias horizontales P, P, et verticalem π ſimul euaneſcere, atque ſic apparebit planum ad rotationem circa punctum A animari potentia P, ſimulque ad deſcenſum ſollicitari potentia π: ſique porro AR ea lege conſtruatur, quam §. 6. expoſuimus, poterit maſſa plani conſiderari tanquam concentrata in R. Et hoc modo fit vis acceleratrix in R ratione motus rotatorii $= \frac{P}{M}$ atque ratione motus verticalis paralleli fit vis acceleratrix $= \frac{\pi}{M}$.

§. 17.

Problema.

Poſito vtroque oſcillationum genere eiusdem durationis inter ſe, quaeritur longitudo penduli iſochroni communis et ratio excurſionum, quas punctum R vtroque motu deſcribit.

Solutio.

Quum per hypotheſin punctum R eodem tempore motu rotatorio deſcribit arculum α, quo deſcendit per altitudinem minimam β, oportet vt ſit eadem ratio inter vires accelerantes $\frac{P}{M}$ et $\frac{\pi}{M}$ quae eſt inter vias deſcribendas α et β, vnde oritur talis aequatio

$$\alpha \pi = \beta P$$

ſubſtituantur pro π et P valores §. 15. dati, eritque

$$FG \times \alpha\beta - FG \times HN \times \alpha\alpha = [AB \times M + \tfrac{1}{3} FN^2 + \tfrac{1}{3} GN^2]\, \alpha\beta - FG \times HN \times \beta\beta,$$

cuius aequationis homogeneitas ita reſtituetur

$$FG \times AR^2 \times \alpha\beta - FG \times HN \times AR\alpha\alpha = [AB \times M + \tfrac{1}{3} FN^2 + \tfrac{1}{3} GN^2]\, \alpha\beta - FG \times HN \times AR \times \beta\beta.$$

Ponatur

Ponatur nunc quantitas cognita $\frac{FG \times AR^2 - AB \times M - \frac{1}{3}FN^3 - \frac{1}{3}GN^3}{FG \times HN}$ $= 2Q$; hoc facto, reductaque aequatione inuenitur

$$\beta = \left(\frac{\mp \sqrt{(AR^2 + Q^2)} - Q}{AR}\right) \alpha,$$

atque ſic iam ſatisfecimus parti problematis poſteriori, qua quaerebatur ratio inter β et α: vt iam et pendulum ſimplex iſochronum inueniatur, quod vocabimus L, conſiderabimus eſſe $L = \frac{M\alpha}{P}$ vel etiam $L = \frac{M\beta}{P}$ (vid. §. §. 7. et 8.): ſi priori valore vtamur atque valorem ipſius P ſubſtituamus (§. 15.) erit

$$L = \frac{M \times \alpha}{[AB \times M + \frac{1}{3}FN^3 + \frac{1}{3}GN^3]\alpha - FG \times HN \times \beta},$$

vel poſito pro β valore ipſius inuento, factaque deinde diviſione per α, habebitur tandem reſtituta ſimul terminorum homogeneitate

$$L = \frac{M \times AR^2}{M \times AB + \frac{1}{3}FN^3 + \frac{1}{3}GN^3 + FG \times HN[Q \mp \sqrt{(AR^2 + Q^2)}]}$$

Q. E. I.

§. 18.

Corollar. I.

Ex duplicitate ſignorum quantitati radicali praefixorum ſequitur, duobus diuerſis modis oſcillationes fieri poſſe vniformes et omnes tautochronas atque pendulum ſimplex iſochronum quouis modo alius eſſe longitudinis.

§. 19.

Corollar. II.

Si ſit $HN = 0$, erit $Q = \infty$ et $FN = GN = \frac{1}{2}$ FG: tuncque, ſi ſeligatur ſignum ſuperius, fiet $\beta = 0$

et

$$\text{et } L = \frac{M \times AR^2}{M \times AB + \frac{1}{3} FN^3 + \frac{1}{3} GN^3} = \frac{12\, M \times AR^2}{12\, M \times AB + FG^3}$$

vt inuenimus §. 8. ſed ſi ſeligatur ſignum inferius, fit $\beta = \infty \alpha$, vel quod eodem recidit, $\alpha = 0$ et $L = \frac{M}{FG}$.

In priori caſu ſunt oſcillationes verticales nullae prae oſcillationibus rotatoriis, in caſu altero ſunt rotatoriae nullae prae verticalibus: ſequitur itaque tanquam corollarium, ſi planum motibus reciprocis minimis modo immergatur modo emergatur, ſine vlla plani motu rotatorio, fore longitudinem penduli hisce oſcillationibus iſochroni $= \frac{M}{FG}$, quod theorema in omnibus etiam corporibus humido inſidentibus valet, ſi per M intelligatur volumen, quod corpus ſub aqua occupat et per FG ſectio, quam corpus cum ſuperficie aquae facit.

§. 20.

Pauca quaedam addam circa oſcillationes corporum; nec enim multis adhuc opus eſt, vt appareat, quomodo hic ſit procedendum, ſi modo attente prius perlecta fuerint, quae in praecedenti diſſertatione monui §. §. 18. 19. et *ſeqq.* quibus demonſtrauimus, quod ſi corporis inclinatio fiat in plano ad lineam, poſitione datam hh, perpendiculari (fig. 5.) atque ſi productae AB applicentur potentiae horizontales aequales et contrariae in ipſo inclinationis plano, altera in puncto A, altera quae ab hoc puncto diſtat linea AR eadem lege, vt ſupra §. 6. conſtructa, demonſtrauimus, inquam, quod ſit quaeuis harum potentiarum corpus inclinantium Tab. I. fig. 5.

$$= (AB \times M + \tfrac{1}{3} \textstyle\int y^3 dx + \tfrac{1}{3} \int Z^3 dx)\, \alpha$$

Sed demonſtrauimus porro praeter haſce duas potentias duas alias requiri potentias itidem horizontales, aequales et contrarias, iisdemque punctis applicatas, ſed in plano ad prius perpendiculari agentes, easque potentias ſimul definiuimus.

His omnibus in memoriam reuocatis, poſſemus iam omnes corporum oſcillationes vtcunque compoſitas definire, modo iam regulares et inter ſe tautochronae factae fuerint, eodem modo et ratiocinio, quo vſi ſumus §. 17. Sunt autem in corpore omni, quod ſine ſelectu accipitur, minimum tria oſcillationum genera:

Primum eſt rotatorium circa punctum A in plano ad lineam *b b* poſitione datam perpendiculari.

Alterum pariter rotatorium circa idem punctum A ſed in plano ad primum planum perpendiculari.

Tertium eſt verticale et parallelum, quo totum corpus motu parallelo aſcendit et deſcendit: ſed vererer ne faſtidium Lectori excitarem; ſi oſcillationes has ita perplexas velim ſine reſtrictione examinare, poſtquam methodum ad hunc finem neceſſariam iam tradidi; dicam igitur nunc tantum de iis oſcillationibus, quae ſimplices fiunt.

Duo autem requiruntur, vt ſimplices ſint, *primo* vt ſit $HN = 0$; *ſecundo* vt ſit $\pi\Phi = 0$; lineas et puncta figurae tertiae explicauimus §. 19. praemiſſae Diſſert.

§. 21.

Problema.

Determinare longitudinem penduli ſimplicis iſochroni cum oſcillationibus ſimplicibus corporis humido inſidentis.

Solutio.

Solutio.

Quia potentia corpus ad rotationes oſcillatorias puras et ſimplices animans eſt $= [AB \times M + \frac{1}{3}\int y^3 dx + \frac{1}{3}\int Z^3 dx]\,\alpha$, erit vis acceleratrix $= \frac{[AB \times M + \frac{1}{3}\int y^3 dx + \frac{1}{3}\int Z^3 dx]\,\alpha}{M}$: vnde (per §. 8.) erit longitudo quaeſita $= \frac{M}{P}$, ſiue

$$L = \frac{M \times AR^2}{AB \times M + \frac{1}{3}\int y^3 dx + \frac{1}{3}\int Z^3 dx}. \quad \text{Q. E. I.}$$

§. 22.

Ad illuſtrandam aequationem hanc generalem, eodem vtemur exemplo, quod adhibuimus §. 22. ſuperioris diſſertationis: habeatur ſcilicet cylindrus rectus homogeneus, cuius grauitas ſpecifica ſit ad grauitatem ſpecificam fiuidi vt n ad m: ſit altitudo cylindri $= a$; radius baſeos $= b$; ponaturque axis cylindri fluido immerſi verticalis; quaeritur pendulum ſimplex iſochronum cum oſcillationibus minimis cylindri.

Demonſtrauimus autem loco citato, eſſe $M = \frac{nc}{2m} \times abb$ atque $P = \frac{nnc}{4mm}\, aabb - \frac{nc}{4m}\, aabb + \frac{c}{8}\, b^4$: ſique calculus recte ponatur fiet porro $AR = \sqrt{(bb + \frac{1}{12} aa)}$. His valoribus ſubſtitutis, fit

$$L = \frac{mna^3 + 12\, mnabb}{48\, nnaa - 48\, mnaa + 24\, mmbb}$$

ſique fuerint verbi gratia $a = 2b$, erit $L = \frac{4mnb}{24nn - 24mn + mm}$ atque, ſi porro poneretur $6m = 7n$, foret $L = 56.\, b$.

CONSIDERATIO PROGRESSIONIS CVIVSDAM AD CIRCVLI QVADRATVRAM INVENIENDAM IDONEAE.

AVCTORE
L. Eulero

§. 1.

Poſita arcus cuiusdam in circulo, cuius radius ſit $= 1$, tangente $= t$, erit ipſe arcus $= \int \frac{dt}{1+tt}$; ſi iam loco differentialium dt ſubſtituantur particulae tangentis finitae quidem, ſed valde exiguae, atque integrationis loco actualis eiusmodi particularum additio perficiatur, expreſſio prodibit eo propius ad arcum propoſitum accedens, quo minores capiantur particulae tangentis t. Sic diuiſa tangente in n partes aequales, quarum quaelibet erit $\frac{t}{n}$, vicem differentialis dt ſubeunda, loco t ſucceſſiue poni debebunt valores $\frac{t}{n}, \frac{2t}{n}, \frac{3t}{n} \ldots$ vsque ad $\frac{nt}{n}$; quo facto arcus cuius tangens eſt t aequabitur huic progreſſioni $\frac{nt}{nn+tt} + \frac{nt}{nn+4tt} + \frac{nt}{nn+9tt} + \ldots \frac{nt}{nn+nntt}$ quae expreſſio eo minus a vero arcus valore differet, quo maior capiatur numerus n. Semper autem haec expreſſio nimis erit parua, niſi pro n ſumatur numerus reuera infinitus.

§. 2. Cum igitur ſumto pro n numero finito iſta progreſſio $\frac{nt}{n^2+t^2} + \frac{nt}{n^2+4t^2} + \frac{nt}{n^2+9t^2} + \ldots + \frac{nt}{n^2+n^2t^2}$ eo propius exprimat arcum cuius tangens eſt t, quo maior fuerit numerus n; perpetuo autem hoc modo valor pro-

prodeat nimis paruus, inueſtigabo, quantum iſta expreſſio quouis caſu a vera arcus longitudine deficiat. Quodſi enim defectus commode atque ad calculum accommodate exhiberi queat, per ſeriem vehementer conuergentem, iſta methodus cuiusque arcus longitudinem determinandi perquam facilis et idonea videtur.

§. 3. Ad hoc inueſtigandum ſingulos expreſſionis terminos methodo conſueta in progreſſionem geometricam reſoluo infinitam, vt ſequitur

$$\frac{nt}{n^2+t^2} = \frac{t}{n} - \frac{t^3}{n^3} + \frac{t^5}{n^5} - \frac{t^7}{n^7} + \text{etc.}$$
$$\frac{nt}{n^2+4t^2} = \frac{t}{n} - \frac{2^2t^3}{n^3} + \frac{2^4t^5}{n^5} - \frac{2^6t^7}{n^7} + \text{etc.}$$
$$\frac{nt}{n^2+9t^2} = \frac{t}{n} - \frac{3^2t^3}{n^3} + \frac{3^4t^5}{n^5} - \frac{3^6t^7}{n^7} + \text{etc.}$$
$$\frac{nt}{n^2+16t^2} = \frac{t}{n} - \frac{4^2t^3}{n^3} + \frac{4^4t^5}{n^5} - \frac{4^6t^7}{n^7} + \text{etc.}$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\frac{nt}{n^2+n^2t^2} = \frac{t}{n} - \frac{n^2t^3}{n^3} + \frac{n^4t^5}{n^5} - \frac{n^6t^7}{n^7} + \text{etc.}$$

§. 4. Ponamus progreſſionis noſtrae oblatae

$$\frac{nt}{n^2+t^2} + \frac{nt}{n^2+4t^2} + \frac{nt}{n^2+9t^2} + \dots + \frac{nt}{n^2+n^2t^2}$$

valorem iam eſſe actu determinatum, eumque eſſe $= s$; ac transformatio facta ſequentem ſuppeditabit aequationem:

$$s = \begin{cases} + \frac{t}{n} \left(1^0 + 2^0 + 3^0 + \ldots + n^0\right) \\ - \frac{t^3}{n^3} \left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2\right) \\ + \frac{t^5}{n^5} \left(1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4\right) \\ - \frac{t^7}{n^7} \left(1^6 + 2^6 + 3^6 + \ldots + n^6\right) \\ + \frac{t^9}{n^9} \left(1^8 + 2^8 + 3^8 + \ldots + n^8\right) \\ - \frac{t^{11}}{n^{11}} \left(1^{10} + 2^{10} + 3^{10} + \ldots + n^{10}\right) \\ \text{etc. in infinitum} \end{cases}$$

§. 5. Quoniam in hac expreſſione coefficientes terminorum $\frac{t}{n}$, $\frac{t^3}{n^3}$, $\frac{t^5}{n^5}$, etc. ſunt ſummae progreſſionum poteſtatum parium ſeriei numerorum naturalium: ſummae hae autem ſe habent ſequenti modo

$$1^0 + 2^0 + \ldots + n^0 = n$$
$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$
$$1^4 + 2^4 + \ldots + n^4 = \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}$$
$$1^6 + 2^6 + \ldots + n^6 = \frac{n^7}{7} + \frac{n^6}{2} + \frac{n^5}{2} - \frac{n^3}{6} + \frac{n}{42}$$
$$1^8 + 2^8 + \ldots + n^8 = \frac{n^9}{9} + \frac{n^8}{2} + \frac{2n^7}{3} - \frac{7n^5}{15} + \frac{2n^3}{9} - \frac{n}{30}$$
$$\text{etc.}$$

ſubſtituantur hi valores definiti loco indefinitorum, ac prodibit ſequens aequatio

$$s = \begin{cases} + t \\ - \frac{t^3}{3} - \frac{t^3}{2n} - \frac{t^3}{6n^2} \\ + \frac{t^5}{5} + \frac{t^5}{2} + \frac{t^5}{3n^2} - \frac{t^5}{30n^4} \\ - \frac{t^7}{7} - \frac{t^7}{2} - \frac{t^7}{2n^2} + \frac{t^7}{6n^4} - \frac{t^7}{42n^6} \\ + \frac{t^9}{9} + \frac{t^9}{2n} + \frac{2t^9}{3n^2} - \frac{7t^9}{15n^4} + \frac{2t^9}{9n^6} - \frac{t^9}{30n^8} \\ \text{etc. etc.} \end{cases}$$

cuius

cuius lex proceſſus vlterioris pendet a coefficientibus formulae generalis ſeries ſummandi. Praecipue autem ad continuandam hanc ſeriem notari conuenit coefficientes vltimorum terminorum in quaque expreſſione, quae hanc tenent progreſſionem: $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{30}$; $\frac{1}{42}$; $\frac{1}{30}$; $\frac{5}{66}$; $\frac{691}{13.210}$; $\frac{7}{6}$; $\frac{3617}{17.30}$; $\frac{43867}{19.42}$; $\frac{174611}{330}$; $\frac{854513}{6.23}$; $\frac{236364091}{5.546}$; quam hucusque produxiſſe ſufficit.

§. 6. Diſponantur termini inuentae expreſſionis ſecundum columnas a ſummo ad imum extenſas, atque ad legem, qua ſingulae columnae progrediuntur, ordinentur; quo facto erit $s =$

$$\begin{aligned}
&+ t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \frac{t^9}{9} - \frac{t^{11}}{11} + \text{etc.} \\
&- \frac{t^2}{2n}(t - t^3 + t^5 - t^7 + t^9 - t^{11} + \text{etc.}) \\
&- \frac{t^2}{6n^2}(t - 2t^3 + 3t^5 - 4t^7 + 5t^9 - 6t^{11} + \text{etc.}) \\
&- \frac{t^4}{30n^4}(t - 5t^3 + 14t^5 - 30t^7 + 55t^9 - 91t^{11} + \text{etc.}) \\
&- \frac{t^6}{42n^6}(t - \frac{28}{3}t^3 + 42t^5 - 132t^7 + \frac{1001}{3}t^9 - 728t^{11} + \text{etc.}) \\
&\qquad\qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

quae ſeries omnes hanc tenent legem, vt poteſtas $\frac{t^m}{Nn^m}$ multiplicari debeat per iſtam ſeriem $t - \frac{(m+1)(m+2)}{2.\ 3} t^3 + \frac{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}{2.\ 3.\ 4.\ 5} t^5 +$ etc.

§. 7. Quanquam haec ſeries ob m numerum integrum affirmatiuum in infinitum excurrit, tamen ſemper habet ſummam finitam, quae ſequenti modo inuenietur. Ponatur tantiſper ſeriei illius ſumma $= v$ erit $m\, v =$ $\frac{mt}{1} - \frac{m(m+1)(m+2)}{1.\ 2.\ 3} t^3 + \frac{m(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5} t^5 -$ etc.

$=$

$= \frac{(1-t\sqrt{-1})^{-m}-(1+t\sqrt{-1})^{-m}}{2\sqrt{-1}}$. Haec autem expreſſio transmutatur in iſtam $mv = \frac{(1+t\sqrt{-1})^m-(1-t\sqrt{-1})^m}{2(1+tt)^m\sqrt{-1}}$. At binomiis his actu ad poteſtatem exponentis m euectis prodibit per aliam ſeriem $mv = \frac{1}{(1+tt)^m}\left(\frac{mt}{1} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}t^3 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}t^5 - \text{etc.}\right)$ quae ad noſtrum inſtitutum maxime eſt accommodata, cum ſponte abrumpatur, quando m eſt numerus integer affirmatiuus.

§. 8. Series ergo v, per quam terminus quisque $\frac{t^m}{Nn^m}$ multiplicari debet, nunc transmutata eſt in hanc $\frac{1}{m(1+tt)^m}$ $\left(\frac{mt}{1} - \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\,\frac{(m-2)}{3}\,t^3 + \text{etc.}\right)$; quamobrem habebitur $s =$

$$t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \frac{t^9}{9} - \frac{t^{11}}{11} + \text{etc.}$$

$$- \frac{t^3}{2n(1+tt)}$$

$$- \frac{t^2}{2\cdot 6\,n^2(1+tt)^2}\cdot\frac{2t}{1}$$

$$- \frac{t^4}{4\cdot 30\,n^4(1+tt)^4}\left(\frac{4t}{1} - \frac{4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3}t^3\right)$$

$$- \frac{t^6}{6\cdot 42\,n^6(1+tt)^6}\left(\frac{6t}{1} - \frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}t^3 + \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}t^5\right)$$

$$- \frac{t^8}{8\cdot 30\,n^8(1+tt)^8}\left(\frac{8t}{1} - \frac{8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3}t^3 + \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}t^5 - \text{etc.}\right)$$

$$- \frac{5t^{10}}{10\cdot 66\,n^{10}(1+tt)^{10}}\left(\frac{10t}{1} - \frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3}t^3 + \text{etc.}\right)$$

$$- \frac{691\,t^{12}}{12\cdot 13\cdot 210\,n^{12}(1+tt)^{12}}\left(\frac{12t}{1} - \frac{12\cdot 11\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3}t^3 + \text{etc.}\right.$$

$$- \frac{7t^{14}}{14\cdot 6\,n^{14}(1+tt)^{14}}\left(\frac{14t}{1} - \frac{14\cdot 13\cdot 12}{1\cdot 2\cdot 3}t^3 + \text{etc.}\right)$$

$$- \frac{3617\,t^{16}}{16\cdot 17\cdot 30\,n^{16}(1+tt)^{16}}\left(\frac{16t}{1} - \frac{16\cdot 15\cdot 14}{1\cdot 2\cdot 3}t^3 + \text{etc.}\right)$$

etc.

§. 9.

§. 9. Cum nunc huius expreſſionis prima ſeries $t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} +$ etc. illum ipſum circuli arcum denotet, cuius tangens eſt t, quem quaerere inſtituimus, ſit z iſte arcus atque manente $s = \frac{nt}{n^2+1t^2} + \frac{nt}{n^2+4t^2} + \frac{nt}{n^2+9t^2} + \ldots\ldots + \frac{nt}{n^2+n^2t^2}$, reperietur arcus $z = s + \frac{t^3}{2n(1+tt)} + \frac{1}{6}\frac{tt}{2nn(1+tt)^2}\cdot 2t + \frac{1}{30}\cdot\frac{t^4}{4n^4(1+tt)^4}(4t - 4t^3) + \frac{1}{42}\cdot\frac{t^6}{6n^6(1+tt)^6}(6t - 20t^3 + 6t^5) + \frac{1}{30}\cdot\frac{t^8}{8n^8(1+tt)^8}(8t - 56t^3 + 56t^5 - 8t^7) + \frac{5}{66}\cdot\frac{t^{10}}{10n^{10}(1+tt)^{10}}(10t - 120t^3 + 252t^5 - 120t^7 + 10t^9) + \frac{691}{13.210}\frac{t^{12}}{12n^{12}(1+tt)^{12}}(12t - 220t^3 + 792t^5 - 792t^7 + 220t^9 - 12t^{11}) + \frac{7}{6}\cdot\frac{t^{14}}{14n^{14}(1+tt)^{14}}(14t - 364t^3 + 2002t^5 - 3432t^7 + 2002t^9 - 364t^{11} + 14t^{13}) +$ etc.

§. 10. Expreſſio haec commodiſſime accommodabitur ad caſum, quo eſt $t = 1$, cum alterni ſeriei termini euaneſcant, atque inſuper arcus z abeat in quartam ſemiperipheriae circuli partem, poſita ergo ſemiperipheria circuli $= \pi$, ita vt ſit $z = \frac{\pi}{4}$, ſumtoque quocunque numero integro affirmatiuo pro n erit $\frac{\pi}{4} = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+4} + \frac{n}{n^2+9} + \frac{n}{n^2+16} + \ldots \frac{n}{n^2+n^2} + \frac{1}{4n} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2\cdot 2n^2} - \frac{1}{42}\cdot\frac{1}{2^3\cdot 6n^6} + \frac{5}{66}\cdot\frac{1}{2^5\cdot 10n^{10}} - \frac{7}{6}\cdot\frac{1}{2^7\cdot 14n^{14}} + \frac{43867}{19\cdot 42}\cdot\frac{1}{2^9\cdot 18n^{18}} - \frac{854513}{6\cdot 23}\cdot\frac{1}{2^{11}\cdot 22n^{22}} +$ etc. Hinc igitur erit $\pi = \frac{4n}{n^2+1} + \frac{4n}{n^2+4} + \frac{4n}{n^2+9} + \ldots\ldots \frac{4n}{n^2+n^2} + \frac{1}{n} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1n^2} - \frac{1}{42}\cdot\frac{1}{2^2\cdot 3n^6} + \frac{5}{66}\cdot\frac{1}{2^4\cdot 5n^{10}} - \frac{7}{6}\cdot\frac{1}{2^6\cdot 7n^{14}} + \frac{43867}{19\cdot 42}\cdot\frac{1}{2^8\cdot 9n^{18}} - \frac{854513}{6\cdot 23}\cdot\frac{1}{2^{10}\cdot 11n^{22}} +$ etc. quae ſeries eo magis conuergit, quo maior numerus pro n accipiatur.

§. 11. Quamuis autem haec ſeries eo magis conuergere videatur, quo maior ſit numerus n tamen perpetuo ad certum vsque terminum tantum conuergit, poſt quem

termini creſcent iterum; hancque ob cauſam non iuuat ſeriem eo vsque adhibere, quoad termini diuergere incipiant, ſed expediet operationem ibi finire, vbi maxima obſeruatur conuergentia. Namque ſi fractionum $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{30}$; $\frac{1}{42}$; $\frac{1}{30}$; $\frac{5}{66}$; etc. ea quae indicem habet ν ponatur $= X$, atque ſequens $= Y$ erit ſemper $\frac{Y}{X} > \frac{(\nu-1)(2\nu-3)}{2\pi^2}$, atque ν in infinitum creſcente fiet $\frac{Y}{X} = \frac{\nu^2}{\pi^2}$. Ex quo apparet terminos iſtius ſeriei continuo magis creſcere, atque nullam progreſſionem geometricam quantumuis conuergentem cum ea coniunctam eam reddere poſſe conuergentem. Hinc autem concluditur in ſerie paragr. praec. plures terminos accipi non licere quam ad ſummum $\frac{\pi n}{\sqrt{2}}$ hoc eſt proxime $2n$: etiamſi enim ſumerentur plures termini, ſumma non ad veram propior accedens reperiretur.

§. 12. Ex hoc vero ipſo ſubſidium ad valorem ipſius π propius inueniendum ope ſeriei paragraphi 10, conſequitur. Ponamus enim ſeriei: $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1 n^2} - \frac{1}{42} \cdot \frac{1}{2^2 . 3 n^6} + \frac{5}{66} \cdot \frac{1}{2^4 . 5 n^{10}} -$ etc. iam actu eſſe additos μ terminos, ac ſequentem terminum eſſe $= P$, eius loco ſumatur iſta expreſſio $\frac{\pi^4 n^4 P}{\pi^4 n^4 + 4\mu^4}$, isque loco omnium reliquorum addatur vel ſubtrahatur, prout terminus P habuerit ſignum + vel − 1. Eſt vero proxime $\pi^4 = 90,740909$, vnde loco termini P ſubſtitui poterit $\frac{P}{1 + \frac{16\mu^4}{363 n^4}}$. Hocque modo eo propius ad verum valorem ipſius π accedetur, quo maior fuerit numerus μ: hoc eſt quo plures termini iam fuerint additi.

§. 13. His tamen non obſtantibus ſeries paragrapho decimo data ſemper dat valorem ipſius π nimis magnum,

quic-

quicquid pro n ſubſtituatur; eo propius autem acceditur, quo maior numerus pro n ſubſtituatur. Sumto enim 1 pro n prodit $\pi = 3,1646 +$ quae expreſſio iam in figura ſecunda a vero valore $3,1415926535897932$ aberrat. Si ponatur $n = 3$, prodibit $\pi = 3,14159272 16 +$ a vero valore in octaua figura diſcrepans. At ſi ponatur $n = 5$ reperietur per eandem methodum

$$\pi = 3,1415926535900726 +.$$
$$\underline{3,1415926535897932}$$
$$0,0000000000002794$$

cuius numeri exceſſus in decima tertia demum figura conſpicitur. Haecque aberratio a veritate eo magis eſt notatu digna, quo minus vitium in ratiocinio inſtituto deprehendi poteſt. Ad quod accedit vt iſta formula aberratione hac non obſtante commode ad valorem ipſius π inueniendum inſeruire queat, ſubſtituendo ſcilicet maiores numeros loco n.

§. 14. Ex his exemplis quibus 1, 3, et 5 loco n ſubſtituimus per inductionem concludi poſſe videtur, valorem ipſius π in fractionibus decimalibus fere ad triplo plures figuras iuſtum repertum iri, quam n contineat vnitates, ſiquidem prima figura 3 computetur; prima autem hac figura non computata videtur numerus figurarum iuſtarum fore $= 2\frac{1}{2}.n$. Sic ſi ponatur $n = 2$ reperitur $\pi = 3,141635$ cuius quinta figura quaternario nimis eſt magna. Ac poſito $n = 4$ prodit $\pi = 3,1415926537 4 +$ cuius decima figura binario maior eſt vera. Poſito autem $n = 6$ reperitur, $\pi = 3,1415926535897935 58 +$ cuius figura demum decima ſexta a veritate recedit.

§. 15. Si nunc in cauſam huius a veritate aberrationis calculi inquiramus, aliam detegere non valemus, niſi diuergentiam ſeriei §. 10. allatae; reliqua enim omnia prorſus ſe recte habere deprehenduntur. Namque ſi t vnitatem excedat, eo maior reperietur aberratio a veritate, quo minor accipiatur numerus n; id quod clariſſime ſe manifeſtabit ſi t ponatur infinitum atque ſimul n $=$ numero infinito. Ponamus enim $t=\infty$, quo caſu in §. 9. abibit z in quartam peripheriae partem, eritque ideo $z=\frac{\pi}{2}$. Sit inſuper $n=pt$, denotante p numerum quemcunque affirmatiuum ſiue integrum ſiue fractum, eritque ob $z=\frac{\pi}{2}=s+\frac{1}{2p}$ ac reliqui termini omnes negligi poſſe videntur, quod tamen in terminis infiniteſimis perperam fit, quippe qui tandem ad finitam magnitudinem excreſcere poſſunt.

§. 16. Interim tamen notari meretur errorem ſatis eſſe exiguum, niſi p ſit numerus vnitate minor, atque quo maior valor ipſi p tribuatur eo minorem fore aberrationem a veritate. Cum enim hoc caſu ſit $s=\frac{p}{p^2+1}+\frac{p}{p^2+4}+\frac{p}{p^2+9}+\frac{p}{p^2+16}+\frac{p}{p^2+25}+$ etc. in infinitum; videatur huius ſeriei ſumma poſſe per quadraturam circuli definiri, quod tamen ſecus ſe habet. Per vltimam enim aequationem foret $s=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2p}$ ſeu $\frac{\pi}{2p}-\frac{1}{2pp}=\frac{1}{p^2+1}+\frac{1}{p^2+4}+\frac{1}{p^2+9}+\frac{1}{p^2+16}+$ etc. cuius quidem aequationis falſitas ſi $p=0$ ſponte elucet. At ſumto $p=1$ foret $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{17}+\frac{1}{26}+$ etc. $=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}$. Vera autem ſumma per alias regulas reperitur $=\frac{\pi}{2}-0,4941222793$ ita vt illa ſumma ſit iuſto minor, idque parte $0,0058777206$ ſin autem ponatur $p=2$, habebitur iſta

ſeries

ſeries $\frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \frac{1}{13} + \frac{1}{20} +$ etc. cuius ſumma per viam hanc erroneam prodit $= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4} - 0,125$; cum tamen conſtet veram ſummam eſſe $= \frac{\pi}{4} - 0,124994522075$, ita vt illius defectus tantum ſit $= 0,000005477924$. Multo autem adhuc minor erit aberratio ſi maiores numeri pro p accipiantur: ſic ſi $p = 3$, in nona demum figura accidet aberratio, atque quocunque numero pro p ſumto prodibit ſumma iuſta ad $3p$ figuras.

§. 17. Ex his ſatis perſpicitur, quam caute circa ſummationem ſerierum diuergentium verſari oporteat, praeſertim ſi eiusmodi ſeries diuergentes occurrant infinitae. Huiusque rei adhuc vnum exemplum afferre viſum eſt, ex quo neceſſitas ſummae circumſpectionis clarius elucebit. Propoſita ſit ſeries quaecunque $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} + \frac{4}{d} + \frac{5}{e} + \frac{6}{f} + \frac{7}{g} + \frac{8}{h}$ + etc. cuius conſtat terminum quemcunque indicis x fore $= a + \frac{(x-1)}{1}(b-a) + \frac{(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2}(c-2b+a) + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}(d-3c+3b-a) +$ etc. Ex hac forma definiantur omnes termini praecedentes verſus ſiniſtram in infinitum progredientes, eritque vt ſequitur

term. indicis $0 = a + (a-b) + (a-2b+c) + (a-3b+3c-d) +$ etc.
term. indic. $-1 = a + 2(a-b) + 3(a-2b+c) + 4(a-3b+3c-d) +$ etc
term. indic. $-2 = a + 3(a-b) + 6(a-2b+c) + 10(a-3b+3c-d) +$ etc
term. ind. $-3 = a + 4(a-b) + 10(a-2b+c) + 20(a-3b+3c-d) +$ etc
etc.

§. 18. Colligantur omnes hi termini antecedentes in infinitum, reperieturque omnium ſumma $= \frac{a}{1-1} + \frac{a-b}{(1-1)^2} + \frac{a-2b+c}{(1-1)^3} + \frac{a-3b+3c-d}{(1-1)^4} +$ etc. quae in ſeries innumerabiles ſecundum litteras a, b, c, d, e, etc. reſoluta abibit in hanc formam:

$$+ a\left(\frac{1}{1-1} + \frac{1}{(1-1)^2} + \frac{1}{(1-1)^3} + \frac{1}{(1-1)^4} + \text{etc.}\right)$$
$$- b\left(\frac{1}{(1-1)^2} + \frac{2}{(1-1)^3} + \frac{3}{(1-1)^4} + \frac{4}{(1-1)^5} + \text{etc.}\right)$$
$$+ c\left(\frac{1}{(1-1)^3} + \frac{3}{(1-1)^4} + \frac{6}{(1-1)^5} + \frac{10}{(1-1)^6} + \text{etc.}\right)$$
$$- d\left(\frac{1}{(1-1)^4} + \frac{4}{(1-1)^5} + \frac{10}{(1-1)^6} + \frac{20}{(1-1)^7} + \text{etc.}\right)$$

§. 19. Series hae ſingulae autem ſummationem admittunt; atque ſummis earum loco ſubſtitutis prodibit aggregatum omnium terminorum antecedentium verſus ſiniſtram in infinitum, vt ſequitur

$$+ a \cdot \frac{1}{(1-1)-1} = - a$$
$$- b \cdot \frac{1}{((1-1)-1)^2} = - b$$
$$+ c \cdot \frac{1}{((1-1)-1)^3} = - c$$
$$- d \cdot \frac{1}{((1-1)-1)^4} = - d$$
$$+ \text{etc.}$$

Ex quo videtur terminorum horum antecedentium ſumma fore $= - a - b - c - d -$ etc. Quare ſi ſeries quaecunque infinita $a + b + c + d + e +$ etc. etiam verſus ſiniſtram in infinitum continuaretur, foret totius ſeriei vtrinque in infinitum abeuntis ſumma ſemper $= 0$; ſi quidem ratiocinium hoc eſſet iuſtum.

§. 20. Neque vero hoc ratiocinium ſemper fallit, ſed in innumerabilibus ſeriebus veritati conſentaneum deprehenditur. Primo enim omnes progreſſiones geometricae hac gaudent proprietate vt in infinitum vtrinque progredientes ſummam habeant $= 0$. Scilicet ſeriei $n + n^2 + n^3 + n^4 +$ etc. ſumma eſt $= \frac{n}{1-n}$ partis autem praecedentis $1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} +$ etc. ſumma eſt $= \frac{n}{n-1}$, quae cum illa iuncta producit nihil. In infinitis autem ſeriebus

ſeriebus aliis ratiocinium hoc maxime a veritate recedit, cuiusmodi eſt ſeries $1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} +$ etc. quae antrorſum continuata ſui fit ſimilis et aequalis, ſcilicet $1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} +$ etc. cuius adeo totius ſumma non fit o ſed potius duplo maior. Haec igitur propoſuiſſe non minoris vtilitatis eſſe arbitror, quam ſummo rigore demonſtratas veritates.

DE

DE NOVO GENERE OSCILLATIONVM.

AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. 1.

Quamuis doctrina de oſcillationibus corporumque motibus reciprocis iam tanto ſtudio ſit pertractata, vt in ea nihil omnino noui proferri poſſe videatur; tamen in hac diſſertatione nouum prorſus genus oſcillationum ſum prolaturus, quod cum a nemine adhuc tactum eſt, tum etiam ſingulari analyſi indiget. Primum quidem anſam de eo cogitandi mihi praebuit Clariſſimus Collega Krafft, in diſſertatione, quam de inſolitis quibusdam oſcillationibus horologii portatilis ſuſpenſi praelegit; deinde vero etiam, cum aeſtum maris eſſem contemplatus, deprehendi iſtum maris motum reciprocum ad idem oſcillationum genus pertinere.

§. 2. Corpus quodcunque oſcillationes perficere motuue reciproco praeditum eſſe dicitur, quando vel totum vel eius partes in dato ſpatio ita perpetuo mouentur, vt eundo et redeundo alternatim in plagas oppoſitas progrediantur. Hac enim ratione comparatus eſt motus pendulorum, qui in hac doctrina tanquam caſus ſimpliciſſimus ſpectari ſolet, ad quem omnia reliqua oſcillationum genera reuocari conueniat: cuiusmodi ſunt vibrationes chordarum, tremores campanarum, vndulationes aquarum;

atque

atque etiam fluxus et refluxus maris. In quibus omnibus motuum ſpeciebus talis reciprocatio alternaque commutatio ſecundum plagas oppoſitas fieri obſeruatur.

§. 3. Cum igitur haec proprietas communis ſit omni motui oſcillatorio, exponam qua in re nouum genus nunc quidem examini ſubiiciendum a reliquis ſatis iam agitatis diſcrepet. Sit ergo ACB linea vel curua vel recta id ſpatium repreſentans, in quo corpus vel portio corporis quaecunque motu reciproco feratur, ita vt alternis vicibus modo verſus dextram in directione ACB modo verſus ſiniſtram in directione BCA promoueatur. Cum igitur nullum corpus ſibi ſoli relictum et liberum iſtiusmodi motu reciproco cieri queat, ſed vniformiter in directum progredi nitatur, viribus opus eſt ad motum oſcillatorium producendum, in quarum diſcrimine praecipua diuerſitas ipſius motus oſcillatorii conſiſtit. Tab. I. Fig. 6. et 7.

§. 4. Quando autem ad vires attendimus perinde eſt cuiusnam figurae ſpatium, in quo fit motus, accipiamus; et propterea hoc ſpatium commodiſſime nobis repraeſentabitur per lineam rectam ACB. Cum igitur motus alternatim verſus dextram et ſiniſtram contingat, eiusmodi opus eſt viribus, quae corpus modo verſus dextram modo verſus ſiniſtram impellant. Hae ergo vires debent eſſe maxime variabiles, atque ſubinde ſui negatiuae fieri; vis enim verſus ſiniſtram pellens conſiderari poteſt inſtar vis negatiuae verſus dextram vrgentis. Quare ſi fuerit p vis, quae corpus, dum in M verſatur, ſollicitat, neceſſe eſt vt p ſic quantitas variabilis, quae non ſolum pro variis circumſtantiis maior minorue fiat, ſed etiam in ſui negatiuam abeat. Fig. 7.

§. 5. Quodſi quantitas huius vis per p ſolum locum, quem corpus in ſpatio ACB occupat, determinatur, oſcillationes inde ortas ad primum genus refero: in hocque genere continentur omnes oſcillationum ſpecies etiamnum tractatae, quae quidem in vacuo fieri ponuntur. Pro hoc itaque oſcillationum genere vis p exprimetur functione quapiam quantitatis, a qua locus corporis M pendet, ſcilicet functione quadam ſpatii MC, exiſtente C puncto fixo ſpatii ACB. Quoties autem iſtiusmodi oſcillationes iſochronae deprehenduntur, vis p directe proportionalis eſt ſpatio MC; quae ſi corpus verſetur inter A et C, tendit ad dextram, corpore autem inter C et B puta in N exiſtente, ſui fit negatiua atque corpus verſus ſiniſtram vrgebit vi, quae ſit vt NC.

§. 6 Ad ſecundum oſcillationum genus refero eas, quae oriuntur a vi p partim a ſpatio MC partim a celeritate, quam corpus in M habet, pendente, eritque his caſibus p functio quaedam cum ſpatii MC tum etiam celeritatis in M. Ad hoc genus praecipue pertinent eae oſcillationes, quae in medio reſiſtente fieri concipiuntur: quia enim reſiſtentia functioni cuidam celeritatis eſt proportionalis, corpus praeter vim ſollicitantem abſolutam retardari cenſendum eſt a reſiſtentia, quae eſt vis directioni motus, quam corpus habet, perpetuo contraria. Quomodo autem pro data lege reſiſtentiae vim abſolutam comparatam eſſe oporteat, vt oſcillationes fiant iſochronae, id in Tractatu meo de motu corporum fuſius expoſui.

§. 7. Ad tertium denique oſcillationum genus eas refero, in quibus corpus praeter vim abſolutam a ſpatio MC pendentem ſollicitatur a vi, cuius quantitas determinatur

minatur per tempus, quod a termino quodam fixo eſt ellapſum, dum corpus in M verſatur. Huiusmodi oſcillationes a nemine adhuc, quantum ſcio, ad calculum ſunt reuocatae; etiamſi tales oſcillationes non parui momenti in mundo fieri quotidie obſeruentur. Ad hoc enim genus pertinent oſcillationes ſupra memoratae atque a Clariſſimo Profeſſore Krafft primum obſeruatae, in quibus vires oſcillationes producentes a motu horologii interno atque idcirco a tempore pendent; accedit autem inſuper vis abſoluta a pondere horologii oriunda, quae diſtantiae a ſitu aequilibrii eſt proportionalis.

§. 8. Manifeſtum autem eſt in eodem hoc genere contineri motum maris reciprocum ſeu alternam eleuationem et depreſſionem. Praecipua enim vis mare ad hunc motum ciens a loco lunae pendet, qua interuallo duodecim fere horarum alternatim attollitur atque deprimitur: vnde haec vis neque a ſitu aquae neque ab eius celeritate pendet, ſed potius a temporis momento. Praeter hanc vero vim mare vrgetur a vi propria grauitatis, qua ſi ſupra libellam ſit eleuatum, deprimitur, contra vero attollitur, ſi eius ſuperficies infra libellam verſetur. Quocirca ſi ex effectu harum duarum virium motus maris debeat definiri, ante natura oſcillationum ad hoc tertium genus pertinentium inueſtigari oportebit.

§. 9 Ponamus igitur oſcillationes fieri in ſpatio ACB, Tab. I fig. 7 et 8.
corpusque dum in M verſatur ſollicitari a duplici vi, quarum altera a loco M pendeat ſpatioque MC ſit proportionalis: ab hac ergo vi corpus, dum in ſpatio AC exiſtit, vrgebitur verſus dextram, contra autem, ſi ſit in ſpatio BC ſitum, verſus ſiniſtram. Altera autem vis pendeat a

tempore, eaque corpus certis momentis verſus dextram, certisque aliis momentis verſus ſiniſtram impelli, idque ſine vllo reſpectu ad corporis locum habitó. Exprimamus autem tempus vniformiter fluens per peripheriam circuli FDHE, quippe quae, cum in ſe ipſam redeat, idonea eſt ad tempus quantumuis denotandum. Vires porro ſint proportionales ſinibus arcuum tempora denotantium, vrgeantque eae verſus dextram, ſi ſint affirmatiui, contra vero ſi fiant negatiui verſus ſiniſtram.

§. 10. Sit F temporis initium, quo oſcillationes inceperunt, fluatque tempus ſecundum ductum FTDHE. Initio igitur hoc vis corpus ſollicitans erit nulla, at poſt tempus FT corpus verſus dextram pelletur vi vt PT; quae vis fiet maxima elapſo tempore FD; poſtmodum iterum decreſcet, donec euaneſcat poſt tempus FDH. Deinde dum tempus ex H per E in F fluit, vis iſta erit negatiua, ac corpus verſus ſiniſtram ſollicitabit; atque elapſo tempore per totam peripheriam expreſſo, eaedem vis ſollicitantis redibunt reuolutiones, vnde in corpore propoſito motum oſcillatorium generari neceſſe eſt; idque ſi hae ſolae vires agerent: a priori autem vi abſoluta a loco corporis pendente iſte motus oſcillatorius eo magis turbabitur, quo maior quouis momento inter has vires reperietur diſſenſus.

§. 11. Ponatur circuli FDHE radius $FG = DG = a$; tota circumferentia $FDHE = 4c$ ita vt c quadrantem circuli denotet: atque elapſum iam ſit tempus per arcum FT repraeſentatum, quod poſito arcu $FT = t$, ſit $= \frac{t}{\sqrt{a}}$: ob homogeneitatem enim conuenit tempus per functionem dimidiae dimenſionis linearum exprimi. Hoc praeterea tempo-

temporis momento exiſtat corpus in loco M, ſitque ſpatium $MC = s$; atque hoc in loco celeritatem habeat verſus dextram tantam, quanta debetur altitudini v. Hoc ergo in loco a priori vi verſus dextram ſollicitabitur, haecque vis, cum proportionalis ſit ſpatio MC, ponatur $= \frac{s}{b}$ exiſtente vi grauitatis $= 1$.

§. 12. Ab altera igitur vi a tempore pendente pariter vrgebitur ad dextram, ſinui PT proportionaliter, ſi quidem ſinus arcus FT ſit affirmatiuus. Ponamus arcus $FT = t$ ſinum $PT = y$, atque vim corpus verſus dextram pellentem eſſe $= \frac{y}{g}$. Cum igitur corpus in M ſollicitetur ab his viribus coniunctim in eandem plagam puta verſus dextram vi $= \frac{s}{b} + \frac{y}{g}$; acceleratio, dum ſpatii elementum Mm abſoluit, innoteſcet. Quoniam vero eſt $Mm = -ds$ prodibit per legem accelerationis $dv = -ds \left(\frac{s}{b} + \frac{y}{g}\right)$, cuius aequationis integratio determinanda erit ex initio motus, ſcilicet ex loco, quem tum corpus occupauit a celeritate, quam eo tempore habuit.

§. 13. Praeter hanc vero aequationem natura circuli ſuppeditat iſtam $dt = \frac{a\,dy}{\sqrt{(a^2 - y^2)}}$ ex qua fit $t = a\,\mathrm{A\,ſin.}\,\frac{y}{a}$ denotante A ſin. $\frac{y}{a}$ arcum cuius ſinus eſt $\frac{y}{a}$ in circulo ſemidiametrum habente $= 1$: ſimilique modo inuerſe erit $y = a\,\mathrm{ſin.\,A}\,\frac{t}{a}$: denotante pariter ſin. A $\frac{t}{a}$, in circulo cuius radius eſt 1, ſinum arcus $\frac{t}{a}$. Si ergo fiat $t = c$, erit $y = a$ et ſi $t = 2c$ fiet $y = 0$; ac generaliter denotante i numerum quemcunque integrum, ſi fuerit $t = 2ic$ erit $y = 0$; ſin $t = (4i+1)c$ erit $y = a$; at ſi $t = (4i-1)c$; fiet $y = -a$. Hinc igitur pro lubitu t loco y, vel y loco t in computum introducetur.

§. 14. Quia vero quatuor habentur incognitae ad problema reſoluendum tribus opus erit aequationibus; quarum duae quidem iam ſunt exhibitae. Tertia vero aequatio ex conſideratione temporis eſt deducenda. Cum enim totum tempus ſit $= \frac{t}{\sqrt{a}}$, erit tempuſculum, quo elementum Mm abſoluitur $= \frac{dt}{\sqrt{a}}$, idem vero tempus habetur $= -\frac{ds}{\sqrt{v}}$ vnde iſta emerget aequatio $\sqrt{v} = \frac{-ds\sqrt{a}}{dt}$. Quamobrem cum habeantur hae quatuor variabiles s, t, y et v, ope trium aequationum $dv = -ds\left(\frac{s}{b} + \frac{y}{g}\right)$; $dt = \frac{ady}{\sqrt{(a^2 - y^2)}}$ et $\sqrt{v} = \frac{-ds\sqrt{a}}{dt}$, duae quaecunque poterunt eliminari, atque aequatio inter duas reliquas elici.

§. 15. Motus autem oſcillatorius commodiſſime cognoſcetur, ſi ad datum quoduis temporis momentum aſſignari poterit in ſpatio A B locus, in quo tum corpus verſabitur. Hanc ob rem conueniet variabiles y et v eliminari atque aequationem inter s et t inueniri. Cum igitur per duas poſteriores aequationes ſit $y = a$ ſin. A. $\frac{t}{a}$ et $v = \frac{ads^2}{dt^2}$, ſi elementum temporis conſtans ponatur erit $dv = \frac{2adsdds}{dt^2}$; qui valores in prima aequatione $dv = -ds\left(\frac{s}{b} + \frac{y}{g}\right)$ ſubſtituti praebebunt hanc aequationem inter s et t: $\frac{2adsdds}{dt^2} = -ds\left(\frac{s}{b} + \frac{a}{g}\text{ ſin. A}\frac{t}{a}\right)$ ſeu $2adds + \frac{sdt^2}{b} + \frac{adt^2}{g}\text{ ſin. A}\frac{t}{a} = 0$: quam ergo bis integrari oportet, vt aequatio finita inter s et t obtineatur.

§. 16. Antequam integrationem huius aequationis ſuſcipiam, quippe quae non parum eſt difficilis, caſus nonnullos ſingulares perpendiſſe iuuabit. Ac primum quidem euaneſcat penitus vis illa a momento temporis pendens, ita vt corpus a ſola vi $\frac{s}{b}$ a ſpatio MC pendente ſollicitetur.

tetur. Hoc poſito erit $g = \infty$, atque haec habebitur aequatio $2abdds + sdt^2 = 0$, quae per ds multiplicata et integrata dat $abds^2 + \frac{s^2dt^2}{2} = \frac{Cdt^2}{2}$; ſeu $\frac{-ds\sqrt{a}}{dt} = \sqrt{\frac{C-s^2}{2b}} = +\sqrt{v}$, ex qua aequatione valor conſtantis C eſt determinandus ita, vt celeritas initialis congruat cum propoſita. Ponamus celeritatem in C deberi altitudini b, fiet $C = 2bb$, atque iſta emerget aequatio $\frac{-ds\sqrt{2ab}}{\sqrt{(2bb-ss)}} = dt$.

§. 17. Aequatio haec vltima integrari poteſt conceſſa circuli quadratura, fitque $t = C - \sqrt{2ab}$. A ſin. $\frac{s}{\sqrt{2bb}}$. Quoniam autem eſt $\sqrt{v} = \sqrt{\frac{2bb-ss}{2b}}$; motus initium, quo celeritas euaneſcebat, incidit in punctum A exiſtente CA $= \sqrt{2bb}$: ex quo definitur conſtans $C = \sqrt{2ab}$ A ſin. 1. Quocirca tempus per ſpatium AM ſeu t erit $= \sqrt{2ab}$. A coſ. $\frac{s}{\sqrt{2bb}}$: quare cum tempus poſitum ſit $= \frac{t}{\sqrt{a}}$, habebitur ipſum tempus $\frac{t}{\sqrt{a}} = \sqrt{2b}$. A coſ. $\frac{s}{\sqrt{2bb}}$. In punctum itaque medium C corpus ex A pertinget tempore $= \sqrt{2b}$ A coſ. $0 = \frac{\pi\sqrt{2b}}{2} = \frac{\pi\sqrt{b}}{\sqrt{2}}$ denotante π peripheriam circuli cuius diameter $= 1$. Vnde non ſolum natura harum oſcillationum ſed etiam iſochroniſmus perſpicitur.

§ 18. Ponamus nunc vim iſtam ſpatio MC proportionalem euaneſcere, alteramque a tempore pendentem ſolam corpus vrgere, cui conditioni ſatisfiet ponendo $b = \infty$, quo facto iſta emerget aequatio $2gdds + dt^2$ ſin. A $\frac{t}{a} = 0$. Ad quam integrandam notari iuuabit eſſe diff. ſin. A. $\frac{t}{a} = \frac{dt}{a}$ coſ. A $\frac{t}{a}$; atque diff. coſ. A $\frac{t}{a} = -\frac{dt}{a}$ ſin. A $\frac{t}{a}$. Integratione ergo prima vice inſtituta prodibit $2gds - adt$ coſ. A $\frac{t}{a} = Cdt$: vnde fit $\frac{ds}{dt} = \frac{C + a \text{ coſ. A } \frac{t}{a}}{2g}$ atque celeritas

leritas

leritas in $M = \sqrt{v} = \frac{-ds\sqrt{a}}{dt} = \frac{-Ca - a^2 \text{coſ. A} \frac{t}{a}}{2g\sqrt{a}}$. Ponatur initio temporis celeritas fuiſſe verſus dextram et debita eſſe altitudini h; erit $2g\sqrt{ah} = -Ca - a^2$ ideoque $Ca = -a^2 - 2g\sqrt{ah}$, ex quo fiet poſt tempus $\frac{t}{\sqrt{a}}$ celeritas in eandem plagam $\sqrt{v} = \sqrt{h} \frac{+a\sqrt{a}\,\text{ſin. v. A} \frac{t}{a}}{2g}$.

§. 19. Cum igitur ſinus verſus cuiusque arcus ſemper ſit affirmatiuus, intelligitur celeritatem $\sqrt{v}$ ſemper fore affirmatiuam ſeu verſus dextram eſſe directam, ſi quidem initio temporis celeritas $\sqrt{h}$ in eandem plagam tendat. Hoc ergo caſu corpus per rectam A B in infinitum progredietur, motu quidem inaequabili; elapſis enim temporibus $\frac{0}{\sqrt{a}}$; $\frac{4c}{\sqrt{a}}$; $\frac{8c}{\sqrt{a}}$; $\frac{12c}{\sqrt{a}}$ et generaliter $\frac{4ic}{\sqrt{a}}$ celeritas corporis a ſiniſtra ad dextram erit $= \sqrt{h}$; elapſis autem temporibus $\frac{c}{\sqrt{a}}$; $\frac{3c}{\sqrt{a}}$; $\frac{5c}{\sqrt{a}}$; et generatim $\frac{(2i+1)c}{\sqrt{a}}$ celeritas erit $= \sqrt{h} + \frac{a\sqrt{a}}{2g}$; temporibus denique $\frac{2c}{\sqrt{a}}$; $\frac{6c}{\sqrt{a}}$; $\frac{10c}{\sqrt{a}}$ et generaliter $\frac{2(2i+1)c}{\sqrt{a}}$ celeritas erit maxima et $= \sqrt{h} + \frac{a\sqrt{a}}{g}$. Quamobrem niſi celeritas initialis $\sqrt{h}$ ſit negatiua ſeu verſus ſiniſtram tendat, motus non dabitur reciprocus, nullaeque abſoluentur oſcillationes.

§. 20. Vt igitur motus oriatur oſcillatorius, quo corpus perpetuo in eodem interuallo contineatur, in quo alternis vicibus eundo et redeundo moueatur, neceſſe eſt vt celeritas aeque ſaepe fiat negatiua ac affirmatiua: id quod eueniet, ſi corpus initio verſus ſiniſtram moueatur celeritate $= \frac{a\sqrt{a}}{2g}$: ſeu ponendo $\sqrt{h} = \frac{-a\sqrt{a}}{2g}$. Hac autem hypotheſi facta prodibit ad datum tempus $\frac{t}{\sqrt{a}}$ celeritas verſus

ſus dextram ſeu $\sqrt{v} = \frac{-a\sqrt{a}.\text{coſ.}\,A\,\frac{t}{a}}{2g}$. Temporibus igitur $\frac{0}{\sqrt{a}}$; $\frac{4c}{\sqrt{a}}$; $\frac{8c}{\sqrt{a}}$ et generaliter $\frac{4ic}{\sqrt{a}}$, celeritas erit $= \frac{-a\sqrt{a}}{2g}$; temporibus $\frac{c}{\sqrt{a}}$; $\frac{5c}{\sqrt{a}}$; $\frac{9c}{\sqrt{a}}$ et generaliter tempore $\frac{(4i+1)c}{\sqrt{a}}$; itemque temporibus $\frac{3c}{\sqrt{a}}$; $\frac{7c}{\sqrt{a}}$ et generaliter tempore $\frac{(4i+3)c}{\sqrt{a}}$ celeritas erit $= 0$. Temporibus denique $\frac{2c}{\sqrt{a}}$; $\frac{6c}{\sqrt{a}}$ et generaliter $\frac{(4i+2)c}{\sqrt{a}}$ celeritas erit $= \frac{a\sqrt{a}}{2g}$

§. 21. Cum igitur caſu quo oſcillationes regulares abſoluuntur, ſit $\sqrt{v} = \frac{-a\sqrt{a}}{2g}$ coſ. A $\frac{t}{a}$; erit $\frac{ds}{dt} = \frac{a}{2g}$ coſ. $\frac{t}{a}$, ſeu $2g\,ds = a\,dt$ coſ. A $\frac{t}{a}$, cuius integrale eſt $2gs = C + aa$ ſin. A $\frac{t}{a}$. Ponatur conſtans $C = 0$, quo ſpatium s quod a medio puncto C computatur, tam crebro fiat negatiuum quam affirmatiuum, erit $s = \frac{aa}{2g}$ ſin. A $\frac{t}{a}$. Temporibus ergo $\frac{0}{\sqrt{a}}$; $\frac{2c}{\sqrt{a}}$; $\frac{4c}{\sqrt{a}}$ et $\frac{2ic}{\sqrt{a}}$ corpus exiſtet in puncto C. Temporibus vero $\frac{c}{\sqrt{a}}$; $\frac{5c}{\sqrt{a}}$, et generaliter $\frac{(4i+1)c}{\sqrt{a}}$ corpus verſabitur in A, exiſtente CA $= \frac{aa}{2g}$. Temporibus autem $\frac{3c}{\sqrt{a}}$; $\frac{7c}{\sqrt{a}}$ et generaliter $\frac{(4i+3)c}{\sqrt{a}}$ corpus ſitum erit in B, exiſtente CB $= \frac{aa}{2g}$. Tempus denique, quo corpus vel ex A in B vel viciſſim ex B in A pertingit erit $= \frac{2c}{\sqrt{a}} = \pi\sqrt{a}$ denotante $1 : \pi$ rationem diametri ad peripheriam.

§. 22 His igitur caſibus euolutis iam ſatis intelligere licet, quomodo in integratione aequationis differentio differentialis $2\,adds + \frac{sdt^2}{b} + \frac{adt^2}{g}$ ſin. A $\frac{t}{a} = 0$ verſari oporteat; ex qua aequatione deriuandus eſt motus, corpus ſi ab vtraque vi coniunctim cieatur. Ac primo quidem tentemus integrationem eo modo, quo in integrationibus

aequationum differentialium cuiuscunque gradus, in quibus altera variabiles plus vna dimenſione non habet, vti ſoleo. Qui modus, tametſi ad conſtructionem aequationis propoſitae manuducet, tamen vehementer implicabitur formulis integralibus, ita vt alia integrandi methodus particularis quidem illi ſit anteferenda.

§ 23. Methodus autem mea prior ita ſe habet: reiectis omnibus terminis, in quibus illa variabilis, quae plures vna dimenſiones nusquam habet, non ineſt, reſidua aequatio integretur. Ex noſtra igitur aequatione emerget iſta $2adds + \frac{sdt^2}{b} = 0$, quae, cum ſit ea ipſa, quam primo caſu habuimus, bis integrata dabit $t = \sqrt{2ab}$. A coſ. $\frac{s}{C}$ ex qua oritur $s = C$ coſ. A . $\frac{t}{\sqrt{2ab}}$. Quo ipſius s valore inuento regula mea porro poſtulat, vt s producto ex hoc valore in nouam variabilem ponatur aequalis: ſit itaque $s = u$ coſ. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}}$, erit $ds = du$ coſ. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}} - \frac{udt}{\sqrt{2ab}}$ ſin. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}}$; atque $dds = ddu$ coſ. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}} - \frac{2dtdu}{\sqrt{2ab}}$ ſin. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}} - \frac{udt^2}{2ab}$ coſ. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}}$.

§. 24. Si iam iſti valores in aequatione propoſita $2adds + \frac{sdt^2}{b} + \frac{adt^2}{g}$ ſin. A $\frac{t}{a} = 0$ ſubſtituantur, prodibit iſta aequatio $2addu$ coſ. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}} - \frac{4adudt}{\sqrt{2ab}}$ ſin. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}} + \frac{adt^2}{g}$ ſin. A $\frac{t}{a} = 0$. Cum nunc habeatur aequatio, in qua altera variabilis u ipſa non ineſt, ponatur $du = pdt$, atque aequatio propoſita abibit in hanc differentialem primi gradus $2adp$ coſ. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}} - \frac{4apdt}{\sqrt{2ab}}$ ſin. A . $\frac{t}{\sqrt{2ab}} + \frac{adt}{g}$ ſin. A $\frac{t}{a} = 0$: quae vlterius tranſit in hanc $dp - \frac{2pdt}{\sqrt{2ab}}$ tang. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}} = -\frac{dt}{2g} \cdot \frac{\text{ſin. A} \frac{t}{a}}{\text{coſ. A} \frac{t}{\sqrt{2ab}}}$ quae ad integrationem magis eſt accommodata.

§. 25.

§. 25. Cum nunc ſit $\frac{-dt}{\sqrt{2ab}}$ ſin. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}}$ $=$ diff. coſ. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}}$, aequatio vltima transformabitur in hanc $dp + \frac{2p\ \text{diff. coſ. A}\ \frac{t}{\sqrt{2ab}}}{\text{coſ. A}\ \frac{t}{\sqrt{2ab}}} = \frac{-dt}{2g} \cdot \frac{\text{ſin. A}\ \frac{t}{a}}{\text{coſ. A}\ \frac{t}{\sqrt{2ab}}}$ quae multiplicata per coſ. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}}$. coſ. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}}$ fit integrabilis, atque integralis aequatio erit haec p coſ. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}}$. coſ. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}} = C - \frac{1}{2g}$ $\int dt$ ſin. A $\frac{t}{a}$ coſ. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}}$ vel ſi conſtans in ipſo integrali inuoluatur, erit $p = \frac{-1}{2g\ \text{coſ. A}\ \frac{t}{\sqrt{2ab}}\ \text{coſ. A}\frac{t}{\sqrt{2ab}}} \int dt\ \text{ſin. A}\frac{t}{a} \cdot \text{coſ. A}\frac{t}{\sqrt{2ab}}$
Cum igitur per t detur p, ex eo reperietur $u = \int p\, dt$ ac denique $s =$ coſ. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}} \cdot \int p\, dt$.

§. 26. Quantumuis autem non ſolum prima integratio, ſed etiam altera difficiles videantur, tamen vtraque re bene perpenſa ſatis commode abſolui poteſt. Tranſmutatione enim integralium fit $\int dt$ ſin. A $\frac{t}{a}$ coſ. A. $\frac{t}{\sqrt{2ab}}$ $= \sqrt{2ab}$ ſin. A $\frac{t}{a}$ ſin. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}} - \frac{\sqrt{2ab}}{a} \cdot \int dt$ coſ. A $\frac{t}{a}$. ſin $\frac{t}{\sqrt{2ab}}$ $= \sqrt{2ab}$ ſin. A $\frac{t}{a}$ ſin. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}} + 2b$ coſ. A $\frac{t}{a}$. coſ. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}}$ $+ \frac{2b}{a} \int dt$ ſin. A $\frac{t}{a}$. coſ. A. $\frac{t}{\sqrt{2ab}}$, quae poſterior formula integralis cum propoſitae ſit ſimilis, habebitur $\int dt$ ſin. A $\frac{t}{a}$ coſ. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}} = \frac{a\sqrt{2ab}.\ \text{ſin. A}\frac{t}{a}.\ \text{ſin. A}\frac{t}{\sqrt{2ab}} + 2ab\ \text{coſ. A}\frac{t}{a}.\ \text{coſ. A}\frac{t}{\sqrt{2ab}}}{a-2b}$ $+ C$ vnde fiet $p = \frac{C}{\text{coſ. A}\ \frac{t}{\sqrt{2ab}}\ .\ \text{coſ. A.}\ \frac{t}{\sqrt{2ab}}} - \frac{a\sqrt{2ab}.\ \text{ſin. A.}\ \frac{t}{a}\ .\ \int \text{A}\ .\ \frac{t}{\sqrt{2ab}} - 2ab\ \text{coſ. A}\ \frac{t}{a}\ \text{coſ. A}\ \frac{t}{\sqrt{2ab}}}{2g(a-2b)\ \text{coſ. A}\ \frac{t}{\sqrt{2ab}}\ .\ \text{coſ. A}\ \frac{t}{\sqrt{2ab}}}$.

ex qua aequatione valor ipſius p per quantitates finitas habetur expreſſus.

§. 27. Quoniam porro eſt $u = \int p\,dt$, multiplicetur valor ipſius p inuentus per dt, quo facto ſingula membra deprehendentur integrabilia; prodibit autem $u = D + \frac{C \text{ ſin. A } \frac{t}{\sqrt{2ab}}}{\text{coſ. A } \frac{t}{\sqrt{2ab}}} - \frac{a^2 b \text{ ſin. A } \frac{t}{a}}{g(a-2b) \text{ coſ. } \frac{t}{\sqrt{2ab}}}$. Quare cum ſit $s = u$ coſ. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}}$ orietur tandem iſta aequatio $s = D$ coſ. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}}$ $+ C$ ſin. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}} - \frac{a^2 b \text{ ſin. A } \frac{t}{a}}{g(a-2b)}$, cuius quantitates conſtantes ex circumſtantiis caſus propoſiti debent definiri. Quod, quo facilius fieri queat, celeritas $\sqrt{v}$ eſt definienda, quae cum ſit $= \frac{-ds\sqrt{a}}{dt}$, erit $\sqrt{v} = \frac{+D}{\sqrt{2b}}$ ſin. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}} - \frac{C}{\sqrt{2b}}$ coſ. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}}$ $+ \frac{ab\sqrt{a} \,.\, \text{coſ. } \frac{t}{a}}{g(a-2b)}$. Ex his ergo aequationibus ad datum quoduis tempus cum locus corporis in recta AB tum etiam celeritas, qua mouebitur, poterit determinari.

§. 28. Caſus quo $2b = a$ ſeu $\sqrt{2ab} = a$, peculiari indiget integratione, neque praecedens ad hunc caſum patet. Erit enim $\int dt$ ſin. A $\frac{t}{a}$. coſ. A $\frac{t}{a} = \frac{1}{2} a$ ſin. A $\frac{t}{a}$. ſin. A $\frac{t}{a}$ $+ C$. ideoque $p = \frac{C}{\text{coſ.A } \frac{t}{a} . \text{coſ.A } \frac{t}{a}} - \frac{a \text{ ſin.A } . \frac{t}{a} \text{ ſin. A } \frac{t}{a}}{4g \text{ coſ.A} \frac{t}{a} . \text{coſ.A} \frac{t}{a}}$.

Vnde fit $\int p\,dt = u = \frac{C \text{ ſin. A } \frac{t}{a}}{\text{coſ.A } \frac{t}{a}} - \frac{a^2 \text{ ſin. A } . \frac{t}{a}}{4g \text{ coſ. A } \frac{t}{a}} + \frac{at}{4g} + D$.

Conſequenter habebitur $s = D$ coſ. A $\frac{t}{a}$ $+ C$ ſin. A. $\frac{t}{a} + \frac{at}{4g}$ coſ. A $\frac{t}{a}$. mutata conſtante C. Hinc itaque oritur $\sqrt{v} = \frac{-ds\sqrt{a}}{dt} = \frac{D}{\sqrt{a}}$ ſin. A $\frac{t}{a} - \frac{C}{\sqrt{a}}$ coſ. A $\frac{t}{a} - \frac{a\sqrt{a}}{4g}$ coſ. A $\frac{t}{a} + \frac{t\sqrt{a}}{4g}$ ſin. A $\frac{t}{a}$.

A $\frac{t}{a}$. Ex quo iſtae oſcillationes poſt tempus infinitum in infinitum excreſcent ac per ſpatium infinite magnum excurrent.

§. 29. Cum iſtae integrationes penitus ſint inſolitae, ac propterea non cuiuis diiudicatu faciles, aliam methodum particularem exponam, cuius ope eaedem aequationes integrales erui queant. Cum aequatio propoſita eſſet $2adds + \frac{sdt^2}{b} + \frac{adt^2}{g}$ ſin. A $\frac{t}{a} = 0$, ea ſinum arcus $\frac{t}{a}$ per ſeriem exprimendo tranſibit in hanc $2adds + \frac{sdt^2}{b} + \frac{dt^2}{g}$ $\left(t - \frac{t^3}{1 \cdot 2 \cdot 3a^2} + \frac{t^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5a^4} - \frac{t^7}{1 \cdot 2 \ldots 7a^6} + \text{etc.}\right) = 0$. Aſſumatur iam pro s iſte valor indefinitus, $s = \alpha + \beta t + \gamma t^2 + \delta t^3 + \varepsilon t^4 + \zeta t^5 + \eta t^6 +$ etc. erit ſubſtitutione facta vt ſequitur:

$$\frac{2adds}{dt^2} = 2 \cdot 1 \cdot 2\gamma a + 2 \cdot 2 \cdot 3\delta at + 2 \cdot 3 \cdot 4\varepsilon at^2 + 2 \cdot 4 \cdot 5\zeta at^3 + 2 \cdot 5 \cdot 6\eta at^4 + \text{etc.}$$

$$\frac{s}{b} = \frac{\alpha}{b} + \frac{\beta t}{b} + \frac{\gamma t^2}{b} + \frac{\delta t^3}{b} + \frac{\varepsilon t^4}{b} + \text{etc.}$$

$$\frac{a}{g} \text{ ſin. A } \frac{t}{a} = \frac{t}{g} - \frac{t^3}{1 \cdot 2 \cdot 3a^2 g} + \text{etc.}$$

§. 30. Si nunc harum trium ſerierum termini ſinguli homogenei ponantur $= 0$, coefficientes aſſumti ſeriei, cui s aequale eſt poſitum, ita definientur vt ſit:

$$\gamma = \frac{-\alpha}{1 \cdot 2 \cdot 2ab}; \quad \delta = \frac{-b - \beta g}{2 \cdot 3g \cdot 2ab}; \quad \varepsilon = \frac{\alpha}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2^2 a^2 b^2}$$

$$\zeta = \frac{2b + a + \frac{\beta ag}{b}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2^2 \cdot a^3 gb}; \quad \eta = \frac{-\alpha}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6\, 2^3 \cdot a^3 b^3}$$

$$\theta = \frac{-b - \frac{a}{2} - \frac{a^2}{4b} - \frac{\beta a^2 g}{4bb}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 7 \cdot 2a^5 bg}. \quad 2 = \frac{\alpha}{1 \cdot 2 \cdots 8 \cdot 2^4 a^4 b^4}$$

$$\varkappa = \frac{b + \frac{a}{2} + \frac{a^2}{4b} + \frac{a^3}{8bb} + \frac{\beta a^3 g}{8b^3}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 9 \cdot 2a^7 bg}; \quad \lambda = \frac{-\alpha}{1 \cdot 2 \cdots 10 \cdot 2^5 a^5 b^5}$$

$$\mu = \frac{-b - \frac{a}{2} - \frac{a^2}{4b} - \frac{a^3}{8bb} - \frac{a^4}{16b^3} - \frac{\beta a^4 g}{16b^4}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 11 \cdot 2a^9 bg}; \quad \text{etc.}$$

vnde reliquorum coefficientium valores cognoſci poterunt.

§. 31 Coefficientes quidem poteſtatum parium ipſius t ſatis regulariter progrediuntur, at poteſtatum imparium exponentes ad has formas rediguntur.

$$\beta = \beta\,; \qquad \delta = \frac{-a+2b}{1\cdot2\cdot3\cdot2ag(a-2b)} - \frac{\beta}{1\cdot2\cdot3\cdot2ab}$$

$$\zeta = \frac{a^2-4b^2}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot4a^3bg(a-2b)} + \frac{\beta}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot4a^2b^2}$$

$$\theta = \frac{-a^3+8b^3}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots7\cdot8a^5b^2g(a-2b)} - \frac{\beta}{1\cdot2\cdot3\cdots7\cdot8a^3b^3}$$

$$\varkappa = \frac{a^4-16b^4}{1\cdot2\cdot3\cdots9\cdot16a^7b^3g(a-2b)} + \frac{\beta}{1\cdot2\cdots9\cdot16a^4b^4}$$

etc.

Quare ſi ſeries $\alpha + \beta t + \gamma t^2 +$ etc. in ſeries ſimplices regulares reſoluatur, prodibit $s =$

$$\alpha\left(1 - \frac{t^2}{1\cdot2\cdot2ab} + \frac{t^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot4a^2b^2} - \frac{t^6}{1\cdot2\cdot3\cdots6\cdot8a^3b^3} + \text{etc.}\right)$$

$$+ \beta\sqrt{2ab}\left(\frac{t}{\sqrt{2ab}} - \frac{t^3}{1\cdot2\cdot3\cdot2ab\sqrt{2ab}} + \frac{t^5}{1\cdot2\cdot3\cdots5\cdot4a^2b^3\sqrt{2ab}} - \text{etc.}\right)$$

$$+ \frac{ab\sqrt{2ab}}{g(a-2b)}\left(\frac{t}{\sqrt{2ab}} - \frac{t^3}{1\cdot2\cdot3\cdot2ab\sqrt{2ab}} + \frac{t^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot4a^2b^2\sqrt{2ab}} - \text{etc.}\right)$$

$$- \frac{a^2b}{g(a-2b)}\left(\frac{t}{a} - \frac{t^7}{1\cdot2\cdot3\cdot a^3} + \frac{t^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot a^5} - \text{etc.}\right)$$

quae ſeries cum ſingulae ſint ſummabiles, obtinebitur loco s ſequens valor finitus, $s = \alpha$ coſ. A . $\frac{t}{\sqrt{2ab}} + \beta\sqrt{2ab}$. ſin. A . $\frac{t}{\sqrt{2ab}} + \frac{ab\sqrt{2ab}}{g(a-2b)}$ ſin. A . $\frac{t}{\sqrt{2ab}} - \frac{a^2b}{g(a-2b)}$ ſin. A . $\frac{t}{a}$. quae aequatio ſi conſtantes α et β aliquantillum mutentur plane congruit cum ea, quae ſupra §. 27. ope integrationis eſt eruta.

§. 32. Retineamus aequationes ſupra inuentas $s =$ D coſ. A . $\frac{t}{\sqrt{2ab}} +$ C ſin. A . $\frac{t}{\sqrt{2ab}} - \frac{a^2b}{g(a-2b)}$ ſin. A $\frac{t}{a}$ et $\sqrt{v} = \frac{D}{\sqrt{2b}}$ ſin. A . $\frac{t}{\sqrt{2ab}} - \frac{C}{\sqrt{2b}}$ coſ. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}} + \frac{ab\sqrt{a}}{g(a-2b)}$ coſ. A $\frac{t}{a}$ in quibus caſus ambo ſpeciales ſupra tractati egregie continentur. Ponamus nunc autem initio quo $t = 0$, corpus quieuiſſe in C, ita vt tum fuerit tam $s = 0$ quam $\sqrt{v} = 0$. Fiet itaque $D = 0$; et $C = \frac{ab\sqrt{2ab}}{g(a-2b)}$, quibus valoribus

loribus ſubſtitutis erit $s = \frac{ab\sqrt{2ab}}{g(a-2b)}$ ſin. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}} - \frac{a^2 b}{g(a-2b)}$ ſin. A $\frac{t}{a}$ atque $\sqrt{v} = \frac{ab\sqrt{a}}{g(a-2b)}$ (coſ. A $\frac{t}{a}$ — coſ. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}}$), ex quibus aequationibus ad datum tempus tum locus corporis, tum eius celeritas innoteſcent.

§. 33. Vt naturam harum oſcillationum penitius inſpiciamus, varias relationes quantitatum a et b contemplemur, quibus arcus $\frac{t}{a}$ et $\frac{t}{\sqrt{2ab}}$ commenſurabiles reddantur. Ac primo quidem incipiamus a maximo ipſius b valore, quo caſu vis a ſpatio s pendens euaneſcit. Cum igitur hoc caſu ſit ſin. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}} = \frac{t}{\sqrt{2ab}}$, fiet $s = \frac{-at}{2g} + \frac{a^2}{2g}$ ſin. A $\frac{t}{a}$; atque $\sqrt{v} = \frac{+a\sqrt{a}}{2g}$ ſ verſ. A $\frac{t}{a}$. Ergo

ſi tempus $\frac{t}{\sqrt{a}}$	erit ſpatium s	ac velocitas $\sqrt{v}$
$\frac{0c}{\sqrt{a}}$	0	0
$\frac{c}{\sqrt{a}}$	$\frac{-ac+aa}{2g}$	$\frac{a\sqrt{a}}{2g}$
$\frac{2c}{\sqrt{a}}$	$\frac{-2ac}{2g}$	$\frac{2a\sqrt{a}}{2g}$
$\frac{3c}{\sqrt{a}}$	$\frac{-3ac-aa}{2g}$	$\frac{a\sqrt{a}}{2g}$
$\frac{4c}{\sqrt{a}}$	$\frac{-4ac}{2g}$	0
$\frac{5c}{\sqrt{a}}$	$\frac{-5ac+aa}{2g}$	$\frac{a\sqrt{a}}{2g}$

§. 34. Hoc igitur caſu, quo cum b ponimus infinitum, tum corpus initio in C quieuiſſe aſſumimus, corpus ex C verſus dextram CB continuo vltra progredietur, motu alternatim accelerato et retardato. Quanquam autem hoc caſu oſcillationes non contingunt, tamen ab eo examen ordiri viſum eſt, vt nexus inter motus hoc modo oriundos, dum b pedetentim minorem valorem conſequitur, clarius pateat. Ponamus $b = \frac{nna}{2}$ vt ſit $\sqrt{2ab} = na$; vnde fiet $s = \frac{n^2 a^2}{2g(nn-1)}$ (ſin. A $\frac{t}{a} - n$ ſin. A $\frac{t}{na}$) atque $\sqrt{v} = \frac{n^2 a\sqrt{a}}{2g(nn-1)}$ (coſ. A $\frac{t}{na}$ — coſ. A . $\frac{t}{a}$): in quibus

ex-

expreſſionibus arcuum $\frac{t}{a}$ et $\frac{t}{na}$ ſinus et coſinus inter ſe comparari poterunt, quoties n fuerit numerus rationalis.

§. 35. A valore ipſius n, qui priore caſu erat infinitus, deſcendamus ad valores continuo minores, quoad perueniatur ad caſum $n = 1$; quo per peculiarem aequationem fit $s = \frac{-a^2}{4g}$ ſin. A $\frac{t}{a} + \frac{at}{4g}$ coſ. A $\frac{t}{a}$; $ac\sqrt{v} = \frac{t\sqrt{a}}{4g}$ ſin. A $\frac{t}{a}$, quo caſu oſcillationes tandem in infinitum excreſcunt: motus autem ita ſe habebit.

Si tempus $= \frac{t}{\sqrt{a}}$	erit ſpatium s	ac celeritas $\sqrt{v}$
$\frac{0c}{\sqrt{a}}$	0	0
$\frac{c}{\sqrt{a}}$	$-\frac{aa}{4g}$	$+\frac{c\sqrt{a}}{4g}$
$\frac{2c}{\sqrt{a}}$	$-\frac{2ac}{4g}$	0
$\frac{3c}{\sqrt{a}}$	$+\frac{a^2}{4g}$	$-\frac{3c\sqrt{a}}{4g}$
$\frac{4c}{\sqrt{a}}$	$+\frac{4ac}{4g}$	0
$\frac{5c}{\sqrt{a}}$	$-\frac{a^2}{4g}$	$+\frac{5c\sqrt{a}}{4g}$

§. 36. Euolutis igitur caſibus, quaſi extremis, ſcilicet $n = \infty$ et $n = 1$. videamus quantum caſus intermedii, quibus pro n ſucceſſiue numeros integros ponemus, ab extremis diſcrepent. Ponamus itaque $n = 2$, ſeu $b = 2a$: erit $s = \frac{2a^2}{3g}$ (ſin. A $\frac{t}{a}$ − 2 ſin. A $\frac{t}{2a}$) atque $\sqrt{v} = \frac{2a\sqrt{a}}{3g}$ (coſ. A $\frac{t}{2a}$ − coſ. A. $\frac{t}{a}$). Quoties igitur fuerit $t = 4ic$, erit $s = 0$; at celeritas euaneſcet, quoties ſit $t = \frac{8ic}{3}$, deſignante i numerum integrum quemcunque. Motus ergo ſe habebit, vt ex hac tabella perſpicietur.

Si

Si tempus $= \frac{t}{\sqrt{a}}$	erit ſpatium s	ac celeritas $\sqrt{v}$
et $t = \frac{0c}{3}$	o	o
$t = \frac{4c}{3}$	$\frac{-2a^2}{3g}$ ſin. A $\frac{2c}{3a}$	$\frac{+4a\sqrt{a}}{3g}$ coſ. A. $\frac{2c}{3a}$
$t = \frac{8c}{3}$	$\frac{-6a^2}{3g}$ ſin. A $\frac{2c}{3a}$	o
$t = \frac{12c}{3}$	o	$\frac{-4a\sqrt{a}}{3g}$.
$t = \frac{16c}{3}$	$\frac{+6a^2}{3g}$ ſin. A $\frac{2c}{3a}$	o
$t = \frac{20c}{3}$	$\frac{+2a^2}{3g}$ ſin. A $\frac{2c}{3a}$	$\frac{+4a\sqrt{a}}{3g}$ coſ. A $\frac{2c}{3a}$
$t = \frac{24c}{3}$	o	o

§. 37. Eaedem igitur motus reuolutiones redeunt elapſo tempore $= \frac{8c}{\sqrt{a}}$, ſeu bis percurſa peripheria circuli; intereaque tres oſcillationes abſoluuntur, quarum media fit per ſpatium duplo maius quam ceterae. Simili modo progrediendo patebit, ſi ponatur $n = 3$, easdem periodos fore redituras poſt tempus $\frac{12c}{\sqrt{a}}$, ſeu peripheria circuli ter confecta: atque ita porro, donec ſi $n = \infty$, periodorum nulla fit reuolutio, atque corpus in eandem plagam perpetuo progredi pergit. Namque ſi $n = 3$, celeritas $\sqrt{v}$ toties euaneſcit, quoties euenit $t = 3ic$: ac ſi $n = 4$, celeritas corporis euaneſcet partim caſibus quibus $t = \frac{16ic}{3}$ partim quibus eſt $t = \frac{16ic}{5}$. Poſito ergo $t = \frac{16ic}{15}$, ſi loco i ſucceſſiue omnes numeri integri ſubſtituantur, celeritas corporis deprehendetur nulla caſibus quibus i eſt,

0, 3, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 21, 24, 25 etc.
different: 3, 2, 1, 3, 1, 2, 3, 3, 2, 1, 3, 1,

poſt tempus adeo $16c$ eadem periodus repetetur, ſeptiesque vna periodo celeritas corporis erit nulla, totidemque vna periodus continebit inaequales oſcillationes: ſi quidem

vna oſcillatio ſumatur inter duos terminos, quibus celeritas eſt $= 0$.

§. 38. Magis fient hae oſcillationes regulares, ſi fuerit $n < 1$ atque $\frac{1}{n}$ numerus integer. Ponamus itaque eſſe $b = \frac{a}{2n^2}$ vt ſit $\sqrt{2ab} = \frac{a}{n}$, eritque $s = \frac{a^2}{2g(nn-1)}$ ($\frac{1}{n}$ ſin. A. $\frac{nt}{a}$ - ſin A $\frac{t}{a}$) atque $\sqrt{v} = \frac{a\sqrt{a}}{2g(n^2-1)}$ (coſ. A $\frac{t}{a}$ - coſ. A. $\frac{nt}{a}$). Toties igitur celeritas corporis euaneſcet, quoties fuerit $t = \frac{4ic}{n \pm 1}$. In idem autem punctum C quo $s = 0$ corpus non recidet, niſi ſit $t = 2ic$. At ſi ſumatur $t = \frac{4ic}{n-1}$ fiet $s = \frac{-a^2}{2gn(n+1)}$ ſin. A $\frac{t}{a}$, ſin autem capiatur $t = \frac{4ic}{n+1}$, fiet $s = \frac{-a^2}{2gn(n-1)}$ ſin. A $\frac{t}{a}$. Ex his ergo formulis ponendo ſucceſſiue loco n numeros 2, 3, 4, 5, etc. natae ſunt ſequentes tabellae, ex quibus motus oſcillatorius corporis duplici vi ſollicitati cognoſci poterit.

Sit $n = 2$ ſeu $b = \frac{a}{8}$

Ad tempus $\frac{t}{\sqrt{a}}$	erit ſpatium s	et celeritas $\sqrt{v}$
ſi $t = 0\, c$	0	0
ſi $t = c$	$-\frac{aa}{6g}$	$+\frac{a\sqrt{a}}{6g}$
ſi $t = \frac{4}{3} c$	$-\frac{aa}{4g}$ ſin. A $\frac{2c}{3a}$	0
ſi $t = 2\, c$	0	$-\frac{a\sqrt{a}}{3g}$
ſi $t = \frac{8}{3} c$	$+\frac{aa}{4g}$ ſin. A $\frac{2c}{3a}$	0
ſi $t = 3\, c$	$+\frac{aa}{6g}$	$+\frac{a\sqrt{a}}{6g}$
ſi $t = 4\, c$	0	0

Sit

Sit $n = 3$ ſeu $b = \frac{a}{18}$.

Ad tempus $\frac{t}{\sqrt{a}}$	erit ſpatium s	et celeritas $\sqrt{v}$
ſi $t = 0\,c$	0	0
ſi $t = \,c$	$-\frac{aa}{12g}$	0
ſi $t = 2\,c$	0	0
ſi $t = 3\,c$	$+\frac{aa}{12g}$	0
ſi $t = 4\,c$	0	0

Sit $n = 4$, ſeu $b = \frac{a}{32}$

Ad tempus $\frac{t}{\sqrt{a}}$	erit ſpatium s	et celeritas $\sqrt{v}$
ſi $t = 0$	0	0
ſi $t = \frac{4}{5}c$	$-\frac{a^2}{24g}$ ſin. A $\frac{4c}{5g}$	0
ſi $t = c$	$-\frac{a^2}{30g}$	$-\frac{a\sqrt{a}}{30g}$
ſi $t = \frac{4}{3}c$	$-\frac{a^2}{40g}$ ſin. A $\frac{2c}{3g}$	0
ſi $t = \frac{8}{5}c$	$-\frac{a^2}{24g}$ ſin. A . $\frac{2c}{5g}$	0
ſi $t = 2\,c$	0	$-\frac{a\sqrt{a}}{15g}$
ſi $t = \frac{12}{5}c$	$+\frac{a^2}{24g}$ ſin. A . $\frac{2c}{5g}$	0
ſi $t = \frac{8}{3}c$	$+\frac{a^2}{40g}$ ſin. A . $\frac{2c}{6g}$	0
ſi $t = 3\,c$	$+\frac{a^2}{30g}$	$-\frac{a\sqrt{a}}{30g}$
ſi $t = \frac{16}{5}c$	$+\frac{a^2}{24g}$ ſin. A $\frac{4c}{5g}$	0
ſi $t = 4\,c$	0	0

Sit $n = 5$ ſeu $b = \frac{a}{50}$.

Ad tempus $\frac{t}{\sqrt{a}}$	erit ſpatium s	et celeritas $\sqrt{v}$
ſi $t = 0$	0	0
ſi $t = \frac{2}{3}c$	$-\frac{aa}{40g}$ ſin. A $\frac{2c}{3a}$	0
ſi $t = c$	$-\frac{aa}{60g}$	0
ſi $t = \frac{4}{3}c$	$-\frac{aa}{40g}$ ſin. A . $\frac{2c}{3a}$	0
ſi $t = 2\,c$	0	0

ſi $t = \frac{8}{3} c$	$+ \frac{aa}{40g}$ ſin. A $\frac{2c}{3a}$	0
ſi $t = 3 c$	$+ \frac{aa}{60g}$	0
ſi $t = \frac{10}{3} c$	$+ \frac{aa}{40g}$ ſin. A $\frac{2c}{3a}$	0
ſi $t = 4 c$	0	0

§. 39. Inter hos caſus omnes maxime notari meretur is, quo erat $2b = a$: eo quod ſpatium, in quo continetur quaeque oſcillatio continuo augetur, ac tandem in infinitum excreſcit: qui effectus eo magis eſt admirandus, quod huic ſoli caſui eſt proprius, atque a viribus finitis oriatur. Ex hoc igitur caſu, ſi quidem commode ad praxin reuocari poſſet, inuentio perpetui mobilis deriuari poſſe videtur: pendulum enim in cycloide oscillans iam ita eſt comparatum, vt impulſiones a grauitate oriundae verſus ſitum aequilibrii, ſint vt ſpatia percurrenda. Quare ſi tali pendulo iſtiusmodi automaton applicetur, quod alteram vim a tempore pendentem producat, vis oſcillationes tantopere augentis portio tum ad automati intenſionem renouandam, quoties opus eſt, tum ad reſiſtentiam et frictionem ſuperandam impendi poſſet, ita vt ſi oſcillationes non increſcant, tamen datae quantitatis perpetuo conſeruentur.

§. 40. Si nunc in cauſam inquiramus, propter quam ſolus iſte caſus oſcillationes continuo adaugeat, aliam non deprehendimus, niſi quod hoc caſu tempus vnius oſcillationis integrae ex vno itu vnoque reditu compoſitae, quae producitur a ſola actione vis a ſpatio s pendente, aequale ſit tempori, quod per totam circuli FDHE peripheriam exprimitur. Si enim corpus a ſola vi $\frac{s}{b}$ ſollicitetur, tempus vnius oſcillationis integrae ex itu et reditu con-

conſtantis erit $= 2\pi \sqrt{2b} = \frac{4c}{a} \sqrt{2b}$ ob $1 : \pi = a : 2c$. Tempus autem per totam circuli peripheriam expreſſum eſt $= \frac{4c}{\sqrt{a}}$; quare vt haec tempora ſint aequalia, neceſſe eſt ſit $2b = a$. qui eſt ipſe caſus memoratus.

§. 41. Hinc etiam natura diſcriminis, quod inter oſcillationes reliquorum caſuum obſeruauimus, penitius inſpici poteſt. Pendet enim hoc diſcrimen partim a quantitate litterae g, qua quidem nulla alia diuerſitas oſcillationibus inducitur, niſi quod per eo maiora ſpatia fiant, quo minorem valorem habeat g, ceterum autem tam ratione motus quam temporis ſui maneant ſimiles. Partim autem differentia oſcillationum, qua indoles ipſarum maxime immutatur, ſita eſt in diuerſo habitu literarum a et b, quo ipſo ratio remporum oſcillationum ab ambabus viribus ſeorſim oriundarum definitur. Eſt enim tempus vnius oſcillationis ſola agente vi $\frac{s}{g}$ ad tempus vnius oſcillationis a ſola vi $\frac{y}{g}$ ortae vt $\sqrt{2b}$ ad $\sqrt{a}$. Ex quo intelligitur, quo magis haec ratio a commenſurabilitate recedat, eo magis oſcillationes futuras eſſe irregulares.

EXPLICATIO PHAENOMENORVM QVAE A MOTV LVCIS SVCCESSIVO ORIVNTVR.

AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. 1.

Si radii lucis in inſtanti per quantumuis magna interualla propagarentur, tum non ſolum quaeque obiecta eo ipſo momento, quo lucem emittere incipiant, apparerent, ſed etiam in eadem directione, quam radius viſiuus tenet, cernerentur, neque in hac obſeruatione motus ſiue obiecti ſiue ipſius ſpectatoris vllum diſcrimen produceret. Aliter res ſe habet, ſi radii lucis non in inſtanti propagantur, ſed ad datum ſpatium abſoluendum dato tempore opus habent. Primo enim cum obiectum ante occultum ſubito lucem emittere incipiat, id eo ipſo momento a ſpectatore non cernetur, ſed eo tardius, quo maior fuerit diſtantia inter obiectum et ſpectatorem. Deinde etiam, niſi tam obiectum quam ſpectator quieſcant, diſcrimen deprehendetur in directione, in qua obiectum apparebit, inaequalitasque intercedet inter directionem, in qua obiectum eodem momento conſpiceretur ab obſeruatore, ſi radii in inſtanti propagarentur, eamque directionem, in qua actu conſpicitur.

§. 2. Lucem autem non in inſtanti propagari euincunt obſeruationes ecclipſium ſatellitum Iouis; quibus conſtat radios

dios lucis circiter 8. minuta prima impendere ad ſpatium, quod inter ſolem et terram interiacet percurrendum. Quare ſi parallaxin ſolis horizontalem aſſummamus 10. minutorum ſecundorum, reperietur diſtantia ſolis a terra = 20618 ſemidiametrorum terreſtrium; ac lux ad tantum ſpatium abſoluendum impendet 8. minuta prima. Ex quo definiri poteſt lucis celeritas, quippe quae tanta erit, qua vno minuto ſecundo abſoluet ſpatium 43. ſemidiametrorum terreſtrium. Quodſi ergo celeritates quasuis metiamur, vti conſtanter faciemus, ſpatiis vno minuto ſecundo percurſis, erit nobis lucis celeritas per 43. exprimenda, dum vnitas ſemidiametrum terrae indicat. Ponamus autem ne nimium his obſeruationibus fidamus numerum indefinitum c pro lucis celeritate; cenſeamusque lucem tempore vnius minuti ſecundi c ſemidiametros terrae percurrere.

§. 3. Vt nunc omnia phaenomena, quae ex ſucceſſiva lucis propagatione conſequuntur, eo diſtinctius euoluamus atque ob oculos ponamus, quatuor caſus ſeorſim examini ſubieciemus. Primo ſcilicet tam obiectum quam ſpectatorem in perpetua quiete collocabimus. Secundo obiecto quidem motum tribuemus, ſpectatorem vero in quiete relinquemus. Tertio eos caſus perpendemus quibus obiectum quieſcit, ſpectator vero ſuum ſitum continuo mutat. Quarto denique vtrique cum obiecto tum ſpectatori motum adiudicabimus. Atque vt noſtra inueſtigatio latius pateat, motum, quem vel in obiecto vel ſpectatore vel in vtroque conſtituemus, tum rectilineum faciemus tum etiam curuilineum. Quod inſtitutum ſi generatim pertractauerimus, tum demum ad phaenomena corporum coeleſtium progrediemur, atque anomalias, quae ex

motu

motu lucis ſucceſſiuo obſeruationibus aſtronomicis inducuntur, diligenter enumerabimus.

Tab. II. fig. 1. §. 4. Quieſcat igitur obiectum lucidum in O ſitque ſpectator in A pariter in quiete conſtitutus. Ponatur diſtantia obiecti ab obſeruatore ſeu recta $OA = u$ ſemidiametrorum terrae, erit tempus quo radius ex obiecto emiſſus ad ſpectatorem pertingit $= \frac{u}{c}$ minutorum ſecundorum. Quodſi ergo obiectum ante fuerit obſcuratum, nunc autem ſubito radios emittere incipiat, non hoc ipſo momento a ſpectatore cernetur ſed demum poſt $\frac{u}{c}$ minuta ſecunda. Atque eo tardius apparere incipiet, quo longius fuerit remotum. Si igitur praeterea aliud adſit obiectum in o quod ſimul lucere incipiat, cuius a ſpectatore diſtantia Ao ſit $= v$ ſemid. terrae, id quidem prius cernetur, ſi diſtantia v minor fuerit quam u; ac poſtquam obiectum o apparuit, alterum obiectum O demum elapſis $\frac{u-v}{c}$ minutis ſecundis fiet conſpicuum.

§. 5. Quam primum autem obiectum O a ſpectatore conſpicietur, id in directione OA apparebit prorſus ac ſi radius lucis OA in inſtanti ab O ad A proceſſiſſet: neque igitur quantitas diſtantiae OA vllum diſcrimen in ſitum obiecti obſeruatum inferet. Cum enim radius lucis OA occulum ſpectatoris in quiete poſitum feriat in directione OA, obſeruator obiectum in eadem directione ſitum iudicabit. Quare cum res eodem modo ſe habeat in altero obiecto o, eadem diſtantia ſeu angulus OAo inter ambo obiecta obſeruabitur, ſiue lux propagetur in inſtanti ſiue quantumuis lente, neque diuerſitas diſtantiarum horum amborum obiectorum vllum diſcrimem in ſitu obſeruato producet. Quotcunque igitur fuerint obiecta

lucida,

lucida, dummodo ſingula quieſcant, ea a ſpectatore pariter quieſcente perinde ratione ſitus obſeruabuntur, ac ſi propagatio lucis eſſet inſtantanea.

§. 6. Accedamus nunc ad caſum ſecundum, quo ſpectator iterum ponitur quieſcens in A, obiecto autem O motus tribuitur in directione O V quacunque cum celeritate. Sit diſtantia obiecti in O conſtituti a ſpectatore OA $= u$ ſemid. terrae, eiusque celeritas ſecundum directionem rectilineam OV tanta, qua vno minuto ſecundo abſoluat s ſemidiametros terrae; ſitque anguli AOV ſinus $= m$, coſinus $= \mu$ exiſtente ſinu toto $= 1$. Primum igitur manifeſtum eſt, ſi obiectum O ſubito radios emittere incipiat, ſpectatorem obiectum non eo ipſo momento viſurum eſſe, ſed aliquanto tardius, ſcilicet poſt $\frac{u}{c}$ minuta ſecunda: atque hoc ipſo momento obiectum conſpectum iri in directione AO, etiamſi hoc tempore obiectum non amplius in hoc loco O verſetur. Quocirca retardatio apparitionis eodem modo eſt comparata, ſiue obiectum quiescat ſiue ſecus, haecque retardatio a ſola diſtantia obiecti a ſpectatore, ſeu ſpatio a radio emetiendo donec in oculum incurrat, pendet. Tab. II. fig. 2.

§. 7. Dubium hoc loco oriri poteſt, quod, cum obiectum in motu poſitum aſſumatur, inde tamen radios aeque emanare ſtatuamus, ac ſi obiectum quieſceret: lapis enim proiectus allegari poteſt, qui a motu hominis proiicientis cum ratione directionis tum etiam celeritatis afficitur. At obiecti lucidi ratio longe aliter eſt comparata; primo enim cum obiectum quaqua verſus radios emittat, ab eo vis obiecti producetur, qui recta ab obiecto in oculum eiicitur, vnde ſiue obiectum quieſcat ſiue moueatur

radii id repreſentantis eadem erit directio. Deinde nullo modo ſtatui poteſt, celeritatem lucis a motu obiecti lucidi affici, cum enim veri ſimile ſit, radios lucis non actu ab obiecto ad nos proiici, ſed per aetherem vndularum inſtar propagari, celeritas lucis a ſola aetheris elaſticitate pendebit, neque motus obiecti ipſius vllo modo particeps erit. Quocirca nullum dubium ſupereſſe poteſt, quin emiſſio radiorum cum ratione directionis tum celeritatis eodem fiat modo ex obiecto vtcunque moto ac ex quieſcente.

§. 8. Quamuis autem obiecti motus in emiſione radiorum nil turbet, tamen directio, in qua conſpicitur a ſpectatore, mutatur. Ponamus enim ex obiecto, dum in O eſt, emanare radium OA in oculum ſpectatoris, qui demum poſt $\frac{u}{c}$ minuta ſecunda eo pertinget. Interea autem ipſum obiectum vi motus, quo vno minuto ſecundo ſpatium s ſemidiametrorum terrae abſoluit proceſſit in V, ita vt ſit ſpatium OV $= \frac{us}{c}$ ſemid. terrae. Ex quo ſpectator obiectum in O conſpiciet, cum id iam revera eſt in V; hocque in loco eo ipſo momento videret, ſi lux in inſtanti propagaretur. Vocabimus igitur directionem AV in qua obiectum tempore obſeruationis actu deprehenditur, locum obiecti verum, directionem vero AO, in qua conſpicitur, locum apparentem: vnde locus verus a loco apparente diſcrepabit angulo O A V, qui angulus in eodem plano erit conſtitutus, in quo ſpectator et via obiecti verſantur.

§. 9. Vt quantitas huius diſcrepantiae ſeu anguli OAV innoteſcat, conſideremus triangulum AOV in quo datur relatio laterum AO et OV, cum ſit AO : OV $= u : \frac{us}{c}$

$\frac{\mu s}{c} = c : s$; ſiue erit AO ad OV vt celeritas lucis ad celeritatem obiecti; datur autem in eodem triangulo praeterea angulus AOV cuius ſinus eſt $= m$ et coſinus $= \mu$. Quare poſitis quantitatibus proportionalibus c et s loco laterum OA et OV, ſi ex A in OV ducatur perpendicularis AP, erit $AP = mc$ et $OP = \mu c$, vnde fit $VP = \mu c - s$. Anguli igitur OAP tangens erit $= \frac{\mu}{m}$, et anguli VAP tangens $= \frac{\mu c - s}{mc}$; ex quibus emergit horum angulorum differentiae OAV tangens $= \frac{ms}{c - \mu s}$ propter $m^2 + \mu^2 = 1$. Ad locum igitur obſeruatum AO obiecti verſus eam regionem, in quam obiectum promouetur, addi debet angulus, cuius tangens eſt $\frac{ms}{c - \mu s}$ vt prodeat locus obiecti verus pro momento obſeruationis. Vnde patet iſtam aequationem non a diſtantia obiecti a ſpectatore pendere, ſed cum celeritate lucis tum celeritate obiecti tum etiam angulo O determinari.

§. 10. Si via OV in qua obiectum mouetur incidat in directionem AO vel euaneſcente angulo AOV vel ad duos rectos vsque excreſcente, erit $m = 0$ quare hoc caſu aequatio ſeu correctio loci apparentis fiet nulla. Poſito autem angulo AOV recto quo caſu fit $m = 1$ et $\mu = 0$, prodibit anguli OAV tangens $= \frac{s}{c}$, vnde differentia inter locum obiecti viſum et verum eo erit maior, quo maior fuerit celeritas obiecti. At ſi, vti plerumque accidere ſolet, celeritas obiecti valde ſit exigua ratione celeritatis lucis, angulus OAV valde fiet paruus, eiusque tangens quae ſatis tuto pro ipſo arcu aſſumi poterit, erit $= \frac{ms}{c}$. Denique intelligitur, ſi lux in inſtanti propagaretur, tum aequationem illam ad locum obſeruatum addendam euaneſcere

ob $c = \infty$: vnde etiam locum, quo obiectum quouis momento appareret, ſi radii in inſtanti propagarentur, pro loco vero aſſumimus.

Tab. II. fig. 3. §. 11. Proſequamur iam obſeruationes obiecti O in directum OM vniformiter progredientis videamusque ſub quonam angulo OAM obiectum quouis momento apparere debeat. Maneat diſtantia $OA = u$, quae ſimul ſit normalis ad ſemitam obiecti OM. Ponamus obſeruationum initium, cum obiectum in O apparuit; reuera ergo obiectum ante iam extitit in O idque tempore $\frac{u}{c}$ minut. ſec. Peruenerit obiectum in M exiſtente anguli OAM tangente $= t$ erit $OM = ut$; quare cum obiectum ſpatium s minuto ſecundo abſoluat, ex O in M peruenit tempore $\frac{ut}{s}$ min. ſec. poſtquam ergo in O fuit obſeruatum, tempore $\frac{ut}{s} - \frac{u}{c}$ min. ſecund. in M exiſtet. Quoniam nunc obiectum a ſpectatore diſtat interuallo $MA = u\sqrt{(1+tt)}$, tardius in M conſpicietur idque $\frac{u\sqrt{(1+tt)}}{c}$ minut. ſecund. Quocirca cum obiectum in O apparuit, ab eo momento angulum OAM cuius tangens $= t$, confeciſſe obſeruabitur tempore $\frac{ut}{s} + \frac{u\sqrt{(1+tt)}-u}{c}$ min. ſecund.

§. 12. Ponamus ſpatium $OM = z$ ſemid. terrae atque obiectum vniformiter motum obſeruabitur hoc ſpatium conficere tempore $\frac{z}{s} + \frac{\sqrt{(u^2+z^2)}-u}{c}$ men. ſec. Hancobrem niſi tarditatis lucis ratio habeatur, hoc obiectum motu inaequabili progredi cenſebitur etiamſi reuera motu aequabili feratur. Quae inaequabilitas vt clarius intelligatur ponamus obiectum ſpatium $z + dz$ confeciſſe id quod eueniet tempore $\frac{z}{s} + \frac{\sqrt{(u^2+z^2)}-u}{c} + \frac{dz}{s} + \frac{zdz}{c\sqrt{(u^2+z^2)}}$; ex quo tempore $\frac{dz}{s} + \frac{zdz}{c\sqrt{(u^2+z^2)}}$ ſpatiolum dz percurriſſe,

ideoque

ideoque celeritatem $\frac{1}{\frac{1}{s}+\frac{z}{cV(u^2+z^2)}} = \frac{csV(u^2+z^2)}{cV(u^2+z^2)+sz}$

habere aeſtimabitur. Atque cum ſpatium fere iam infinitum confecit, aeſtimabitur progredi celeritate $\frac{cs}{c+s}$, cum initio obſeruatum eſſet celeritate s ferri, vnde hoc obiectum continuo retardari putabitur, quamuis reuera aequabiliter progrediatur.

§. 13. Moueatur nunc obiectum O in peripheria circuli OVMN aequabiliter, in cuius centro A conſtitutus ſit ſpectator immobilis. Ponatur diſtantia obiecti O a ſpectatore A, quae perpetuo erit eadem ſeu radius circuli $OA = u$ ſemid. terrae: ſitque celeritas obiecti tanta, qua ſingulis minutis ſecundis conficiat s ſemidiametros terrae. Si ergo ponatur ratio diametri ad peripheriam $= 1 : \pi$ obiectum reuertetur in idem punctum O, cum emenſum erit ſpatium $2\pi u$ ſemidiametrorum terrae; vnde vna reuolutio abſoluetur tempore $\frac{2\pi u}{s}$ minut. ſec. Quare cum obiectum circa ſpectatorem tempore $\frac{2\pi u}{s}$ minut. ſec. abſoluat angulum 360. grad. dato minutorum ſecundorum numero, puta n, conficiet angulum $\frac{180ns}{\pi u}$ graduum; talisque appariturus eſſet motus, ſi lux in inſtanti propagaretur. Tab. II. fig. 4.

§. 14. At cum radius antequam ab obiecto in O verſante ad ſpectatorem A vsque pertingat, impendat $\frac{u}{c}$ min. ſec. interea ipſum obiectum ex O promouebitur vsque in V, exiſtente angulo $OAV = \frac{180s}{\pi c}$ grad. Quare cum obiectum ſpectatori in O apparet, id eo momento reuera iam in V verſabitur, ac differentia inter locum apparentem

rentem O et locum verum V erit angulus $OAV = \frac{180 s}{\pi c}$ grad. qui angulus ad locum apparentem verſus plagam OM ſecundum quam obiectum progreditur, addi debet, vt prodeat locus obiecti verus. Deinde quia eadem ratio vbique manet, vbicunque obiectum in peripheria circuli reperiatur, ita, vt ſi appareat in M, locus verus ſit N, differens ab obſeruato angulo $MAN = \frac{180 s}{\pi c}$ grad. motus per totam peripheriam videbitur aequabilis, perinde ac ſi lux in inſtanti propagaretur.

§. 15. Ponamus tempus vnius reuolutionis obiecti per totam circuli peripheriam eſſe conſtans, vti in ſyſtemate Ptolemaico et Tychonico ſtatuitur, quo omnia aſtra tempore vnius diei ſiderei circa terram quieſcentem rotari ponuntur, ſitque hoc tempus $\varkappa$ min. ſecund. habebitur haec aequatio $\frac{2\pi u}{s} = \varkappa$ indeque $s = \frac{2\pi u}{\varkappa}$. Quamobrem locus obiecti verus V diſcrepabit a loco apparente O angulo $OAV = \frac{360 u}{c\varkappa}$ grad. ex quo diſcrimen inter locum apparentem et verum eo erit maius, quo maior fuerit diſtantia obiecti a ſpectatore. Si igitur diſtantia obiecti, veluti ſtellarum fixarum, ſit quaſi infinite magna, locus verus ab apparente maxime diſcrepabit; atque ſi duarum ſtellarum fixarum diſtantiae fuerint inaequales, loca apparentia quouis tempore maxime different a veris, neque diſtantia vera earum, ſeu angulus ad terram, quo a ſe inuicem diſtant, vllo modo definiri poterit.

Tab. II. fig. 5. §. 16. Pertractato caſu ſecundo aggrediamur caſum tertium, quo obiectum quieſcere ſpectator vero moueri ponitur. Quieſcat igitur obiectum in O ſpectator vero in A conſtitutus moueatur vniformiter in directione

A *a*.

Aa. Sit ſpectatoris celeritas $= r$ qua ſcilicet tempore vnius minuti ſecundi r ſemidiametros terrae conficiat; anguli vero OAa ſinus ſit $= m$ coſinus $= \mu$. Manifeſtum autem eſt omnia plane ac propterea etiam apparentiam manere eandem, ſiue caſus vti eſt propoſitus locum obtineat, ſiue tam ſpectatori quam obiecto motus aequabilis in directionibus parallelis tribuatur. Hancobrem concipiamus toti ſyſtemati imprimi motum in directione ipſi Aa oppoſita atque celeritate $= r$; quo fiet vt ſpectator in A quieſcat, obiectum O vero in directione OV parallela ipſi Aa promoueatur, idque celeritate $= r$. Hoc igitur pacto praeſens caſus eſt reductus ad caſum praecedentem.

§. 17. Quoniam igitur ſpectator in A quieſcit, obiectum vero in directione OV aequabiliter progreditur celeritate $= r$, anguli que VOA, qui aequalis eſt angulo OAa ſinus eſt $= m$ coſinus $= \mu$, innoteſcet diſcrimen inter locum obiecti apparentem et verum. Si enim radius OA, quem obiectum dum in O erat emiſit, in oculum ſpectatoris incidat, tum ſpectator videbit obiectum in directione AO, qui erit locus apparens; hoc autem momento obiectum iam erit in puncto V, ita vt directio AV praebeat locum verum. Inuenimus autem ante anguli OAV tangentem eſſe $= \frac{mr}{c-\mu r}$; quare ſi vera obiecti elongatio a directione Aa deſideretur, ad elongationem obſeruatam, quae erat angulus OAa, addi debet angulus, cuius tangens eſt $= \frac{mr}{c-\mu r}$, ſicque obtinebitur angulus VAa, qui exprimit veram obiecti elongationem a directione Aa tempore obſeruationis.

§. 18.

§. 18. His definitis tollamus motum communem, quem ſpectatori atque obiecto tribuimus; quo facto obiectum, vt caſus erat propoſitus, quieſcet in O, ſpectator vero celeritate r in directione Aa promouebitur. Dum autem radius ex obiecto O emittitur erat ſpectator in A vnde progredietur per aliquod ſpatium puta Aa, antequam obiectum ipſi appareat. Quam primum igitur obiectum videbit, id in directione ao conſpiciet parallela directione AO, falleturque iterum angulo oAO $=$ OAV cuius tangens eſt $= \frac{mr}{c-\mu r}$. Quamobrem ſi ſpectator qui in recta Aa vniformiter progreditur celeritate $= r$ conſpiciat obiectum lucidum ſub angulo OAa cum ſua motus directione, cuius ſinus eſt $= m$ coſinus $= \mu$, hunc angulum augere debebit angulo cuius tangens eſt $\frac{mr}{c-\mu r}$, vt obtineat directionem veram, in qua obiectum verſatur.

§. 19. Quanquam haec correctio deducta eſt ex converſione caſus tertii ad ſecundum, tamen aeque eſt legitima, ac ſi ex ipſius caſus propoſiti contemplatione eſſet deducta. Quamuis enim videatur, cum radius in directione OA ex obiecto O ad ſpectatorem in A ſitum perveniat, ſpectatori verum obiecti ſitum repraeſentari debere; id tamen tantum valet, quando ſpectator quieſcit. Namque ſi ſpectator in motu fuerit poſitus radius in eius oculum incidens non ſub ea directio, in retinam impingit, in quam impingeret ſi quieſceret, ſed incidentiae angulus ſimul ex motu oculi debet definiri. Simile ſcilicet hic radio accidit, quod vento in vela mota impingenti, cuius effectus definiri non poteſt, niſi ſimul motus velorum ratio habeatur.

§. 20.

§. 20. Inueſtigemus igitur effectum, quem radius lucis in oculum motum exerit, et in diſcrimen ſitus apparentis et veri ſecundum regulas motus inquiramus. Quieſcat igitur obiectum in puncto O, ſpectator vero vniformiter promoueatur in recta AE celeritate r: ac dum in A verſatur excipiat radium O A ex obiecto emiſſum. Cum ergo radius in directione OA celeritate c impingat in oculum A celeritate r in directione AE motum, reſoluatur motus radii in duos laterales, quorum alter PA ſit normalis ad AE, alter OP cum directione AE congruat. Quodſi igitur O A celeritatem lucis c exprimat, erit PA vt celeritas normalis ad AE, et OP erit celeritas in directione EA, quae cum ſit contraria celeritati oculi r, eundem praeſtabit effectum, ac ſi celeritate r augeretur, atque in oculum quieſcentem incurreret. Tab. II. fig. 6.

§. 21. Sumta ergo AE tanta, vt ſit $OA : AE = c : r$, celeritas radii OP augeatur parte $OQ = AE$ atque oculus in A quieſcens radium excipiet, cuius motus erit compoſitus ex motu PA et motu QP, ex quo reſultabit radius QA, in cuius directione obiectum a ſpectatore in A conſtituto cernetur. Spectatori ergo, qui etſiamſi moueatur ſibi in A quieſcere videtur, obiectum apparebit ſub angulo QAE, cum tamen ipſi, ſi lux in inſtanti propagaretur, ſub angulo OAE apparere deberet: vnde angulus QAO conſtituet exceſſum loci obiecti veri ſupra apparentem. Ponamus anguli apparentis QAE ſinum eſſe $= m$ coſinum $= \mu$; cum autem ſit $OA = c$; $OQ = AE = r$, ponamus tantiſper $AQ = y$, erit $AP = my$; $PQ = \mu y$, et $OP = \mu y - r$: atque $c^2 = yy - 2\mu r y +$

 r^2 ſeu

r^2 ſeu $y = \mu r + \sqrt{(c^2 - m^2 r^2)}$. Hinc anguli QAP tangens erit $= \frac{\mu}{m}$, anguli OAP tangens $= \frac{-m^2 r + \mu\sqrt{(c^2 - m^2 r^2)}}{m\mu r + m\sqrt{(c^2 - m^2 r^2)}}$ vnde anguli QAO tangens $= \frac{mr}{\sqrt{(c^2 - m^2 r^2)}}$ atque ſinus $= \frac{mr}{c}$.

§. 22. Diuerſas ergo praebuerunt correctiones ambo iſti caſum propoſitum euoluendi modi, quarum diſcrimen etſi eſt valde exiguum et contemnendum, ſiquidem r reſpectu c fuerit quantitas valde parua, tamen in originem diſcrepantiae diligentiſſime erit inquirendum, vt, vtri determinationi magis ſit fidendum, planum fiat. Ac primo quidem conſtat, differentiam ex eo oriri, quod in poſteriore conſideratione aſſumſimus radium QA ſenſum obiecti in oculo excitantem ferri celeritate $y = \mu r + \sqrt{(c^2 - m^2 r^2)}$ cum priori conſiderandi modo radio viſiuo celeritatem c tribuiſſemus. Si enim loco y in poſteriore modo ponamus c, ſeu $c - \mu r$ loco $\sqrt{(c^2 - m^2 r^2)}$ prodibit anguli QAO tangens omnino vt antea $= \frac{mr}{c - \mu r}$. Quaeſtio itaque huc redit, vtrum ratiocinium veritati magis ſit conſentaneum.

Tab. II. fig. 5. §. 23. Hoc dum perpendemus, mox intelligemus in priore ratiocinio vitium eſſe commiſſum. Cum enim reductione tertii caſus ad ſecundum toti ſyſtemati in quo cum obiectum O tum ſpectator A verſantur motum ſecundum directionem $A\alpha$ celeritate r tribuiſſemus, definiri debuiſſet, vtrum ſimilis motus medio, per quod radii propaganrur, ſimul ſit impreſſus an non. Namque ſi, vti fecimus medium in quiete relinquatur, caſus, ad quem reductio eſt facta, omnino erit diuerſus a caſu propoſito, quia in caſu propoſito medium vna cum obiecto quieſcebat, in caſu autem mutato medium habebatur quieſcens cum ſpectatore.

tore : ex quibus diſſimilitudo caſuum, ac proinde illegitima reductio clare apparet. Ipſum itaque medium in directione Aα ſimul promoueri debuiſſet celeritate r, qui motus ſi pariter in radios transferatur, prodibit prorſus vt altero modo anguli OAV ſinus $= \frac{mr}{c}$.

§. 24. Cum igitur poſterius ratiocinium cum veritate conſpiret, atque anguli, quo locus obiecti verus ab apparente diſcrepat, ſinus ſit $\frac{mr}{c}$, non autem eius tangens ſit $= \frac{mr}{c-\mu r}$, perſpicuum eſt aliter obiectum quieſcens ſpectatori moto eſſe appariturum, aliter obiectum motum ſpectatori quieſcenti, etiamſi motus poſterior priori ſit aequalis et oppoſitus. Ratio huius diſcriminis in eo latet, quod lucem inſtar ſoni per motum vndulatorium propagari poſuimus, quo pacto motus obiecti radios emittentis celeritatem radiorum non afficit; verum medium, ſi moveatur, eundem motum cum motu radiorum miſcebit; ac propagationem vndularum vel accelerabit vel retardabit, prout motus medii motui radiorum vel ſit ſecundus vel aduerſus. Cuique haec plana fient, ſi quae hactenus de luce ſumus commentati, ad ſonum atque auditum accommodentur.

§ 25. Perfecta autem ſimilitudo inter caſum ſecundum et tertium conſeruaretur, ſi lux non motu vndulatorio ſed actuali eiaculatione ex corpore lucente emittatur. Si enim ponamus particulas lucis, quae radios conſtituunt, ex corpore lucido quieſcente actu explodi celeritate c, quam luci tribuimus, idem corpus, ſi moueatur, ſuum motum cum motu radiorum coniunget: neque medium, ſiue moueatur ſiue quieſcat, quicquam motum radiorum afficiet; inſtar

 vacui

Tab. II. fig. 2. vacui enim conſiderari poterit. Ex hac autem hypotheſi alia reperietur correctio ſitus apparentis in caſu ſecundo. Si enim obiectum lucidum moueatur in directione O V celeritate s hoc ipſo motu celeritas radio OA naturalis c afficietur, tam ratione directionis, ſecundum quam eiiciuntur, quam ratione celeritatis, quae vel augebitur vel diminuitur.

Tab. II. fig. 2. §. *26*. Ponamus eum radium ſenſum obiecti O in oculo ſpectatoris excitare, qui ſi obiectum quieſceret, emitteretur in directione O E celeritate c: quoniam autem obiectum in directione O V celeritate s promoueri ponitur, ſi capiatur $OV : OE = s : c$, radius O E a motu obiecti ita afficietur, vt eius directio cadat in diagonalem OA parallelogrammi O E A V, atque iſto pacto ſpectatorem offendat, celeritatem vero iſte radius O A habebit tantam, quae ſe habeat ad naturalem c vti O A ad O E. Cum igitur obiectum interea, dum radius ad ſpectatorem pertingit, progreditur per ſpatium $OV = s$; ſpectator in aeſtimatione loci obiecti falletur angulo O A V. Quodſi ergo ſinus anguli A O V ponatur $= m$ erit perpendicularis Vp in A O ducta $= ms$ atque ſinus anguli $OAV = \frac{Vp}{AV} = \frac{ms}{c}$, qui error apprime congruit cum eo, quem pro caſu tertio inuenimus.

§. 27. Plurimum igitur inter eſt noſſe, vtrum lux per actualem exploſionem particularum lucidarum ex obiecto lucido generetur, an ſimili modo, quo ſonus per aërem propagatur. Si enim prior modus in natura locum habeat, tunc ſimiles forent differentiae inter loca apparentia et vera pro caſu ſecundo et tertio, tutoque liceret alterum caſum ad alterum ope motus contrarii toti ſyſtemati impreſſi reducere. Quodſi autem modus poſterior locum

cum habeat, radiique lucis inſtar ſoni propagentur, tum illicita erit iſta reductio; etſi diſcrimen eſt prorſus contemnendum, niſi obiectis ſtupendae celeritates tribuantur, vti fit in ſyſtematibus mundi Ptolemaei et Tychonis. Quanquam autem poſterior ſententia veritati magis conſentanea videtur, tamen pro praeſenti inſtituto ſequamur priorem propter eximiam conuenientiam inter correctiones ad caſus ſecundum et tertium pertinentes.

§. 28. Perſequemur igitur hic potiſſimum eam hypotheſin, qua radii lucis ex obiecto lucido actu explodi ponuntur, atque aſſumamus radios, qui ex ſole ad nos perueniunt, ſumma celeritate ex ipſo ſole eſſe eiaculatos, vnde tempore 8. circiter minutorum ad nos pertigerint. Quamuis enim haec hypotheſis minus ſit probabilis quam altera, qua lumen inſtar ſoni propagari ſtatuitur, tamen magis eſt accommodata ad noſtrum inſtitutum atque motus compoſitionem recipit, cuius altera hypotheſis minus eſt capax. Si enim propagatio lucis in generatione pulſuum per medium ſubtile conſtet, tum ſi ad ſenſationem reſpiciamus, non tam ad tempus, quo pulſus per datum ſpatium vehuntur, erit attendendum, quam ad proprium cuiusuis particulae motum tremulum, qui maxime diuerſus eſſe potetit a motu progreſſiuo radiorum.

§. 29. Stabilita igitur hac hypotheſi, phaenomena caſus primi, quo tam obiectum quam ſpectatorem in quiete poſuimus, omnino manebunt vt ſupra expoſuimus: pro caſu ſecundo autem ea mutatio adhiberi debet, cuius fecimus mentionem, ſcilicet loco anguli OAV, qui praebet differentiam inter locum obiecti apparentem et verum, cuius tangens erat $= \frac{ms}{\theta-\mu s}$ ſubſtitui debet angulus cuius ſi-

Tab. II. fig. 6. nus eſt $\frac{ms}{c}$. Quae autem de caſu tertio §. 20. attulimus ea, cum ſint ex compoſitione motus deducta, recte ſe habent, ac ſi obiectum ſpectatori in A conſtituto, qui ſecundum directionem AE celeritate r promoueatur, appareat in directione AQ ſeu ſub angulo QAE cuius ſinus eſt m, adhunc angulum addi debet angulus QAO, cuius ſinus eſt $= \frac{mr}{c}$, vt prodeat ſitus obiecti verus.

Tab. II. fig. 7. §. 30. Vt autem phaenomena caſus ſecundi diſtinctius euoluamus, examinemus miſſionem radiorum, quae ex obiecto mobili fit. Quieſcat igitur primum obiectum in O, ac radii ex eo quaqua verſus emittentur aequali celeritate c; ita vt ſpectator A, vbicunque conſiſtat, radium OA ex obiecto excipiat celeritate c motum, vnde ſi diſtantia OA fuerit u, radius OA ex obiecto ad ſpectatorem perueniet tempore $\frac{u}{c}$ minut. ſecund. Ponamus nunc obiectum celeritate s in directione OV progredi, iſte motus cum motu naturali ſingulorum radiorum debebit coniungi. Deſcribatur igitur centro O radio OC, qui ſit ad OV vti c ad s circulus CBFD; eiusque quilibet radius OB praebebit radium lucis vna cum ipſius celeritate, qui ex obiecto quieſcente emitteretur. At ob motum obiecti radius OB non hanc directionem conſeruabit, ſed progredietur per diagonalem OI parallelogrammi OBIV, eiusque celeritas erit vt OI.

§. 31. Si iam hoc modo ſinguli radii OB cum motu obiecti coniungantur, reperientur puncta I ſita eſſe in peripheria circuli GIH centro V radio $VG = OC = c$ deſcripti: atque quaelibet recta OI ex loco obiecti O ad hanc alteram peripheriam ducta exhibebit celeritatem radii OA in directione OI emiſſi. Ab hoc igitur obiecto ſpecta-

ſpectator in A excipiet quidem radium OA, ſed alia celerirate motum, quae ſe habet ad celeritatem naturalem c vti recta OI ad radium OF. Hinc intelligitur, ſi celeritas obiecti OV fuerit aequalis vel maior quam celeritas lucis naturalis, euenire poſſe, vt recta OA ex obiecto ad ſpectatorem ducta circulum centro V deſcriptum nusquam ſecet, quodſi euenerit obiectum a ſpectatore prorſus non conſpici poterit. Fieri etiam poteſt vt, radius ad ſpectatorem tam lente perueniat, vt in organo viſus nullum effectum producere poſſit, quo caſu pariter obiectum erit inconſpicuum.

§. 32. In hac hypotheſi etiam phaenomena obiecti in periphaeria circuli reuoluentis et ſpectatoris in centro A conſtituti aliter ſe habebunt. Ponamus enim obiectum in peripheria circuli OV circumagi celeritate $= s$: ſitque radius OA$= u$. Cum igitur ex obiecto, dum in O erat, radius ad ſpectatorem pertingit, obiectumque in O ipſi repraeſentat, tum obiectum non amplius erit in O, ſed in loco V, adeo vt obſeruator fallatur. Si quidem obiectum moueretur eadem celeritate ſecundum tangentem OV, tum interea obiectum perueniret in V, foretque angulus OAV, errorem exprimens, tantus, vt eius ſinus ſit $= \frac{s}{c}$ ob angulum VOA rectum; radiusque tanta celeritate ad ſpectatorem perueniret, quae ſe habet ad celeritatem c, vti AO ad AV. Quanquam autem obiectum non in directum ſed in circulo progredi ponitur, tamen emiſſio radiorum, dum eſt in O, vtroque caſu aequaliter afficietur; ita vt etiam hoc caſu radius OA ad ſpectatorem veniat celeritate $= \frac{c \cdot AO}{AV}$. Tab. II. fig. 8.

§. 33.

§. 33. At error obſeruationis a loco obiecti vero alius erit, ſi obiectum in circulo promoueatur. Cum enim, ſi in directum OV progrederetur, interea dum radius ex O ad A pertingit, perueniat ad V vsque; eodem interuallo per peripheriam circuli latum abſoluet arcum OU, aequalem tangenti OV; eritque error nunc angulus OAU, vtique maior quam foret ſi obiectum in directum moueretur. Quoniam vero eſt anguli OAV ſinus $= \frac{s}{c}$, erit eiusdem coſinus $= \frac{\surd(c^2-s^2)}{c} = \frac{AO}{AV}$; vnde ob $AO = u$ erit $AV = \frac{cu}{\surd(c^2-s^2)}$, et $OV = \frac{su}{\surd(c^2-s^2)}$, atque velocitas radii OA in oculum ſpectatoris incidens erit $= \surd(c^2-s^2)$. Quare ſi obiecti celeritas s aequalis fuerit vel adeo maior quam celeritas lucis naturalis c, tum nequidem obiectum a ſpectatore cerni poterit, quod idem eueniet ſi s valde prope ad c accedat.

§. 34. Vt quantitas anguli OAU definiatur, ſit $1 : \pi$ ratio diametri ad peripheriam, eritque $\pi u =$ ſemiperipheriae circuli ſeu arcui 180. graduum. Fiat igitur πu : $180° = OU \left(\frac{su}{\surd(c^2-s^2)}\right) : \frac{180 s}{\pi\surd(c^2-s^2)}$, ex qua analogia praebebit $\frac{180 s}{\pi\surd(c^2-s^2)}$ in gradibus angulum OAU, quo locus obiecti viſus a vero diſcrepat. Cum praeterea obiectum vno minuto ſecundo percurrat s ſemidiametros terrae, totam peripheriam $2\pi u$ abſoluet tempore $\frac{2\pi u}{s}$ min. ſec. Ponamus tempus vnius reuolutionis eſſe conſtans atque $\varkappa$ min. ſec. fiet $s = \frac{2\pi u}{\varkappa}$. Quamobrem angulus OAU erit $= \frac{360 u}{\surd(c^2\varkappa^2 - 4\pi^2 u^2)}$; ob duplicem igitur cauſam creſcit error ſeu angulus OAU creſcente diſtantia AO, ac facta $u = \frac{c\varkappa}{2\pi}$, error in infinitum augebitur; hoc vero caſu obiectum ceſſabit ſpectatori apparere. Quare ſi ſtellae cunctae circa terram quietam tem-

tempore 24. horarum circumagerentur, eae quae magis diſtarent quam 591287 ſemidiametros terrae nequidem conſpicuae forent, hoc eſt quae tricies magis eſſent remotae quam ſol: ex quo ne vnica quidem ſtella fixa eſſet conſpicua.

§. 35. Videbimus autem rem longe aliter ſe eſſe habituram, ſi terrae motum circa axem, ſideribus vero quietem tribuamus, quamuis primo intuitu ſimilia phaenomena accidere debere videantur. Neque vero hoc mirum videbitur, ſi hanc rem attentius perpendamus; licet enim ſaluis legibus et regulis mechanicis vniuerſo cuidam ſyſtemati corporum, motum aequabilem in directum imprimere, ita, vt nil in phaenomenis mutetur, at vel motum inaequabilem vel curuilineum tribuere minime licet. Ex quo manifeſtum eſt, caſum maxime immutari, ſi motus circularis, quem ſpectator habeat, transferatur ad aſtra, iisque motus circulares, eodem tempore periodico abſoluendi, adiudicentur. Tali autem illegitima translatione motus lucis potiſſimum perturbari debet.

§. 36. Ponamus igitur ſpectatorem in A conſtitutum promoueri continuo per peripheriam circuli ABD, celeritate tanta, qua tempore vnius minuti ſecundi abſoluat r ſemidiametros terrae. Concipi ſcilicet poteſt circulus ABD tanquam parallelus terrae qui ſpatio diei ſiderei ſeu 23. horis, 56′ 4″ circa axem reuoluatur ab occidente in orientem, ita, vt punctum E ſpectatori verſus orientem ſit ſitum. Ponatur coſinus eleuationis poli, quae reſpondet loco ſpectatoris in A, $= p$, poſito ſinu toto atque ſemidiametro terrae $= 1$, erit $p =$ ſemidiametro paralleli AC, ex quo circumferentia paralleli erit $= 2\pi p$, quam cum Tab. II. fig. 9.

ſpectator abſoluat tempore $86164''$, vno minuto ſecundo conficiet ſpatium $\frac{\pi p}{43082}$ ſemid. terrae. Hinc ergo dabitur celeritas ſpectatoris $r = \frac{p}{1371374}$, ac log. $r = lp - l$ ſin. tot. — $4,1371461 = lp - 14,1371461$; tantaque celeritate ſpectator verſus orientem ſecundum directionem tangentis A E progredietur.

§. 37. Appareat nunc iſti ſpectatori ſidus in directione A O, quaeriturque ſitus huius ſideris verus Ao, ſub quo appareret, ſi vel terra quieſceret vel radii in inſtanti propagarentur; ſidus autem quieſcere aſſumimus. Ex ſidere O in planum paralleli demittatur perpendiculum O P, atque ex P in radium C A productum normalis PQ. Quoniam vero planum paralleli in aequatorem coeli incidit rectaque C A Q meridianum loci A denotat, meridianus enim eſt planum normale ad A B D idque in recta C A Q ſecat; dabit angulus O A P declinationem ſideris obſeruatam, angulus P A Q autem diſtantiam circuli horarii a meridiano loci A. Cum igitur figura ſidus in declinatione boreali ac verſus occidentem ſitum repraeſentet, ſit ſinus declinationis borealis ſeu anguli $OAP = a$, coſinus $= \alpha$. anguli P A Q ſeu diſtantia ſideris horaria a meridiano verſus occidentem, ſinus $= b$, coſinus $= \beta$.

§. 38. His poſitis ſit ſideris obſeruati diſtantia a terra $OA = u$, quae quidem quaſi infinita aſſumitur attamen ex calculo euaneſcet; erit ergo $OP = au$ et $AP = \alpha u$; porro erit $PQ = \alpha b u$ et $AQ = \alpha\beta u$. In tangentem A E productam ex P ducatur normalis PR, eritque $PR = AQ = \alpha\beta u : \alpha b$ eſt ſinus diſtantiae ſtellae a meridiano in circulo poſitionis ſumta, ſeu circulo per polos meridiani ducto: ducta autem recta OR perpendicularis erit ad rectam A R.

At

At vero habebitur $AR = \alpha b u$ et $OR = u\surd(1-\alpha^2 b^2)$: vnde anguli OAE, quem locus ſideris viſus cum directione AE, in qua ſpectator promouetur, conſtituit, ſinus erit $= \surd(1-\alpha^2 b^2)$. Verus itaque ſideris locus erit in o puncto in plano OAE ſito, atque angulo OAo, cuius ſinus eſt $\frac{r\surd(1-\alpha^2 b^2}{c}$, magis verſus occidentem remoto. Abſcindatur ergo in plano OAR angulus OAo, cuius ſinus ſit $= \frac{r\surd(1-\alpha^2 b^2)}{c}$ et coſinus $= \frac{\surd(c^2 - r^2 + \alpha^2 b^2 r^2)}{c}$; eritque o locus ſideris verus.

§. 39. Inueſtigemus iam quantum locus verus a loco viſo cum ratione declinationis tum aſcenſionis rectae diſcrepet. Ponamus breuitatis gratia ſinum anguli $OAo = n$, et coſinum $= \nu$; demittamusque ex o in AR perpendicularem or, erit anguli oAr ſinus $\nu\surd(1-\alpha^2 b^2) - n\alpha b$ et coſinus $= \nu\alpha b + n\surd(1-\alpha^2 b^2)$: vnde ob $Ao = u$, prodibit $or = u(\nu\surd(1-\alpha^2 b^2) - n\alpha b)$ et $Ar = u(\nu\alpha b + n\surd(1-\alpha^2 b^2))$. Ex o in planum paralleli demittatur perpendicularis op, erit ob triangula ORP et orp ſimilia $op = a u(\nu - \frac{n\alpha b}{\surd(1-\alpha^2 b^2)})$ et $pr = \alpha \mathfrak{b} u(\nu - \frac{n\alpha b}{\surd(1-\alpha^2 b^2)})$ atque hinc $Ap = u\surd(1 - a^2(\nu - \frac{n\alpha b}{\surd(1-\alpha^2 b^2)})^2)$. Inſuper vero eſt $pq = Ar$ et $Aq = pr$.

§. 40. Vera ergo ſideris declinatio indicabitur angulo oAp, cuius ſinus erit $= a(\nu - \frac{n\alpha b}{\surd(1-\alpha^2 b^2)})$ coſinus vero $= \surd(1 - a^2(\nu - \frac{n\alpha b}{\surd(1-\alpha^2 b^2)})^2)$; dum apparentis declinationis erat ſinus $= a$, coſinus $= \alpha$. Vera autem ſideris elongatio a meridiano verſus occaſum exprimetur angulo qAp, cuius ſinus erit $\frac{pq}{Ap} = \frac{\nu\alpha b + n\surd(1-\alpha^2 b^2)}{\surd(1-a^2(\nu - \frac{n\alpha b}{\surd(1-\alpha^2 b^2)})^2)}$ et coſinus $= \frac{Aq}{Ap} =$

$$\frac{\alpha\mathfrak{b}(\nu - \frac{n\alpha b}{\surd(1-\alpha^2 b^2)})}{\surd(1-a^2(\nu - \frac{n\alpha b}{\surd(1-\alpha^2 b^2)})^2)}$$; ita vt anguli qAp tangens ſit $=$

$\frac{n - n\alpha^2 b^2 + \nu\alpha b\beta\sqrt{(1-\alpha^2 b^2)}}{\nu\alpha\beta\sqrt{(1-\alpha^2 b^2)} - n\alpha^2 b\beta}$, cum anguli apparentis QAP tangens eſſet $= \frac{b}{\beta}$. Excedit ergo vera elongatio qAp apparentem QAP angulo PAp, cuius tangens eſt $= \frac{n\beta}{n\alpha^2 b + \nu\alpha\sqrt{(1-\alpha^2 b^2)}} \doteq \frac{\beta r}{\alpha^2 br + \alpha\sqrt{(c^2 - r^2 + \alpha^2 b^2 r^2)}}$ reſtitutis loco n et v valoribus adſumtis.

§. 41. Quoniam vero terra ſecundum ſignorum coeleſtium ordinem reuoluatur, ſi aſcenſio recta obſeruata computetur ab aequinoctio verno, haec aſcenſio recta diminui debet angulo q A p, vt oriatur aſcenſio recta vera. Deinde vero etiam declinatio obſeruata per diminutionem corrigi debebit, ita vt verus ſideris locus propius ad aequatorem accedat, quam obſeruatur. Si quidem fuerit $a > a\left(\nu - \frac{n\alpha b}{\sqrt{(1-\alpha^2 b^2)}}\right)$ ſeu $c + \alpha br > \sqrt{(c^2 - r^2 + \alpha^2 b^2 r^2)}$ id quod quidem ſemper contingit, ſi b affirmatiuum obtineat valorem, ſidusque verſus occidentem ſpectetur; contrarium euenit, ſi ſidus verſus orientem aſpiciatur, quo caſu declinatio augeri debet.

§. 42 Obſeruetur ſidus, dum per meridianum loci, in quo ſpectator verſatur, tranſit, fiet $b = 0$ atque $\beta = 1$: maneatque declinationis borealis obſeruatae ſinus $= a$, coſinus $= \alpha$, vnde vera ſideris declinatio tanta cenſeri debebit, vt eius ſinus ſit $= \nu a = \frac{a}{c}\sqrt{(c^2 - r^2)}$. Cum autem r ſit quantitas vehementer exigua reſpectu ipſius c, erit $\sqrt{(c^2 - r^2)} = c - \frac{r^2}{2c}$, vnde verae declinationis ſinus erit $= a - \frac{arr}{2cc}$, coſinus vero $\alpha + \frac{a^2 r^2}{2\alpha cc}$, quare vera ſideris declinatio minor erit quam vera, angulo, cuius ſinus eſt $= \frac{arr}{2\alpha cc}$, quod diſcrimen ob quadratum ipſius r tam eſt exiguum, vt tuto negligi queat: adeo vt declinatio obſeruata

ſeruata a vera non diſcrepet, ſi quidem obſeruatio in meridiano inſtituatur.

§. 43. Deinde cum angulus QAP euaneſcit, fiet anguli qAp tangens $= \frac{r}{\alpha\sqrt{(cc-rr)}}$; vnde cum quaecunque ſtella in meridiano obſeruatur, ea reuera per meridianum iam tranſiiſſe erit cenſenda, anguloque a meridiano verſus occidentem iam diſtare, cuius ſinus vel tangens ſit $= \frac{r}{\alpha c}$, ob r valde paruum. Vel correctio ita erit inſtituenda, vt aſcenſio recta ſtellae obſeruata diminuatur angulo, cuius ſinus eſt $= \frac{r}{\alpha c}$. Eſt autem $r = \frac{p}{1371,34}$ et $c = 43$ vnde fit $\frac{r}{c} = \frac{p}{589676}$. Quodſi ergo obſeruator ſub aequatore verſetur, quo caſu ſit $p = 1$, atque tranſitum ſtellae per ipſius zenith obſeruet, ab aſcenſione recta aeſtimata auferre debebit angulum 20. minutorum tertiorum, quae correctio tuto negligi poteſt.

§. 44 Ponamus ſtellam obſeruari in circulo ſextae horae verſu soccaſum, fiet $b = 1$ et $\beta = 0$, vnde ſinus verae ſtellae declinationis erit $= \nu a - n\alpha$ et coſinus $= na + \nu\alpha$, cum declinationis apparentis ſinus eſſet a, et coſinus α. maior igitur eſt declinatio apparens quam vera, exceſſusque eſt angulus cuius ſinus eſt $= n = \frac{ar}{c}$, qui angulus ſi ſit maximus, quod euenit ſi $a = 1$ et $p = 1$, tamen ne quidem ad ſemiſſem vnius minuti ſecundi aſſurgit. Aſcenſio vero recta obſeruata omnino non diſcrepabit a vera, eo quod $\beta = 0$, qua hypotheſi tangens anguli PAp evaneſcit: idem autem vſu venit ſi obſeruatio in altero circulo horario verſus orientem inſtituatur; ibi autem declinatio obſeruata non minui ſed augeri debet angulo cuius ſinus eſt $= n = \frac{ar}{c}$.

§. 45. Ex his intelligitur, variationem apparitionis ſiderum, quae quidem a motu terrae diurno proficiſcitur, ob ingentem paruitatem tuto negligi poſſe; ita vt loca ſtellarum apparentia ſine errore pro veris haberi queant; nunquam enim diſcrimen ad integrum minutum ſecundum, imo ne ad ſemiſſem quidem aſſurgit. Haecque perinde ſe habent in vtraque motus lucis hypotheſi; altera enim dat pro aequatione angulum, cuius tangens eſt $\frac{mr}{c-\mu r}$, altera angulum cuius ſinus eſt $\frac{mr}{c}$, qui duo anguli cum fractio $\frac{r}{c}$ ſit quam minima, a ſe inuicem non diſcrepant. Verum ſi loco motus terrae diurni, ſimilis motus ſideribus tribuatur ad mentem Ptolemaei, tum non ſolum aberrationes obſeruationum a locis veris pro vtraque hypotheſi maxime prodirent diuerſae, ſed etiam ipſae aberrationes fierent tam vaſtae, vt nil certi ad locum verum definiendum ex iis concludi poſſet; quae ſola circumſtantia ſufficere poteſt ad ſyſtemata terrae immotae funditus ſubuertenda.

Tab. II. fig. 9. §. 46. Cum igitur motus terrae diurnus nullam ſenſibilem differentiam inter loca ſiderum apparentia ac vera producat, videamus, quantum motus annuus in hoc negotio valeat. Repraeſentet igitur nunc circulus ABD orbitam terrae in qua circa ſolem C reuoluatur; tuto autem hic circulum pro orbita terrae vera aſſumere licet. Huius ergo circuli ſemidiameter AC erit 20618 ſemid. terrae, vnde eius peripheria continebit, 129546 ſem. terrae, quod ſpatium cum emetiatur anno ſydereo ſeu 31558140″, vno minuto ſecundo abſoluet ſpatium $\frac{129546}{31558140}$ ſemid. terrae, quod erit valor ipſius r, vnde cum ſit $c = 43$ fiet $\frac{r}{c} = 0,0000954,6 = \frac{1}{10475}$, qui valor fere

fere ſexagies maior eſt, quam ante erat pro motu diurno, ex quo iam intelligitur, motum annuum ſenſibilem variationem obſeruationibus inducere debere.

§. 47. Primo quidem ipſe ſol, ad cuius locum reliqua ſidera ſunt referenda, nunquam in ſuo vero ſitu apparebit, ſed ſub angulo acuto ad tangentem AE. Hancobrem longitudo ſolis obſeruata continuo erit nimis parua, ad eamque addi debet angulus cuius ſinus eſt $\frac{r}{c}$, ſecundum ſignorum ſeriem, qui angulus prodit 20′′. Cum igitur ſol apparet in initio arietis, eius locus verus cenſeri debet 0 S, 0°, 0′, 20′′. Atque hoc modo ante loca ſolis obſeruata corrigi oportet, antequam ſiderum loca cum ſolis loco comparentur. Cum autem iſta aberratio loci ſolis apparentis a loco vero perpetuo ſit eadem, motus ſolis in eccliptica ex terra eodem modo conſpicietur ac ſi radii in inſtanti propagarentur, neque hinc noua anomalia motui ſolis admiſcebitur.

§. 48. Cognito igitur vero ſolis loco geocentrico obſeruetur a ſpectatore A ſidus O in directione OA, ex quo in planum orbitae terrae ſeu eccliptícae demittatur perpendicularis OP, atque ex B in CA productam pariter perpendiculum PQ. Ducta igitur AP, praebebit angulus OAP latitudinem ſtellae obſeruatam, cuius ſinus ſit $= a$, coſinus $= \alpha$. Angulus vero QAP dabit diſtantiam ſtellae a loco ſoli oppoſito in eccliptica; quae in gradibus eccliptícae obtinebitur, ſi a puncto ſoli oppoſito ſubtrahatur longitudo ſtellae obſeruata; ſit igitur huius anguli PAQ ſinus $= b$, coſinus $= \mathfrak{b}$. Cum igitur iam reliqua maneant vt ante in motu terrae diurno, verus ſideris locus erit in directione Ao; atque vera latitudo definietur angulo

gulo $\circ Ap$; veraque differentia longitudinis ſideris et loci ſoli oppoſiti angulo qAp.

§. 49. Cum igitur verae ſideris latitudinis $\circ Ap$ ſinus ſit $= a\left(\nu - \frac{n\alpha b}{\sqrt{(1-\alpha^2 b^2)}}\right) = \frac{a}{c}\left(\sqrt{(c^2 - r^2 + \alpha^2 b^2 r^2)} - \alpha b r\right)$, fiet iſte ſinus ob r reſpectu c vehementer paruum, $= a\frac{-\alpha abr}{c}$; eiusque coſinus $= \alpha + \frac{a^2 br}{c}$. Latitudo ergo ſtellae obſeruata diminui debet angulo, cuius ſinus eſt $\frac{abr}{c}$, ſiue latitudo ſit borealis ſiue auſtralis. Haec autem diminutio tantum locum habet cum angulus PAQ ſinum b habet affirmatiuum, hoc eſt cum ſol ad coniunctionem ſtellae accedit: ſeu a tempore oppoſitionis ad coniunctionem vsque. Contra autem a coniunctione ſtellae cum ſole vsque ad oppoſitionem latitudo ſtellae debet augeri ob b negatiuum, atque ad latitudinem obſeruatam ſiue borealem ſiue auſtralem addi debet angulus cuius ſinus eſt $= \frac{abr}{c}$.

§. 50. Vt haec correctio facilius ad calculum aſtronomicum accommodari queat, ſequens adhibeatur regula. Ex canone logarithmorum conſueto excerpantur logarithmi ſinuum cum latitudinis ſtellae obſeruatae, tum diſtantiae ſtellae a puncto in eccliptica ſoli oppoſito ſecundum longitudinem, hique logarithmi addantur et a ſumma auferatur iſte logarithmus 18,7057289. reſiduo logarithmo quaeratur numerus reſpondens ex tabula logarithmorum numerorum naturalium, qui numerus praebebit aequationem latitudinis: quae a latitudine obſeruata ſubtrahi debet, ſi ſtellae locus in eccliptica intra locum ſolis et eius oppoſitionem verſetur; addi vero debet, ſi locus ſtellae in eccliptica intra punctum ſoli oppoſitum ipſumque ſolis locum contineatur.

§. 51.

§. 51. Vt iſta operatio exemplo illuſtretur ponamus ſtellae cuiusdam latitudinem obſeruatam eſſe 75°, 17′, 48″; longitudinem vero fuiſſe deprehenſam 5 S, 13° 20′ 55″: eoque tempore ſolis longitudinem fuiſſe 7 S, 25°, 42′, 35″: computus ergo inſtituatur vt ſequitur

	Longitudo ☌ ☉	7 S, 25°, 42′, 35″
	Longitudo ☍ ☉	1 S; 25°, 42′, 35″
ſubtr.	Longitudo ſtellae	5 S; 13°, 20′, 55″
	Ergo ang. QAP =	8 S, 12°, 21′, 40″
	ſeu ang. QAP =	252°, 21′, 40″

cuius ſinus cum ſit negatiuus, latitudo obſeruata debet augeri per aequationem: ex quo erit *b* ſinus anguli 72°, 21′, 40″: eiusque logarithm. = 9, 9790862

eiusque logarithm. =	9, 9790862
addatur log. 75°, 17′, 48″ =	9, 9855400
	19, 9646262
ſubtr.	18, 7057289
	1, 2588973

Ad latitudinem ergo obſeruatam addi debent 18″, 9‴ vnde vera latitudo erit 75°, 18′, 6″, 9‴.

§. 52. Cum igitur latitudo ſtellae obſeruata eſt nulla, tum etiam latitudo vera euaneſcet, vnde ſtellae in ipſa ecliptica ſitae etiam ſemper in eccliptica apparebunt. Quo magis autem ſtella quaepiam ab eccliptica eſt remota, eo magis latitudo apparens diſcrepare poterit a latitudine vera, ceteris paribus; maxima enim differentia incidit in quadraturas ſtellae cum ſole, eſtque $\frac{\alpha r}{c}$; quae addi debet in quadratura priore, ſeu ea, quae poſt coniunctionem cum ſole accidit, in poſteriore autem quadratura coniunctionem praecedente ſubtrahi debet. At cum ſtella proxime ad polum eccliptícae erit obſeruata tum ob α quantitatem val-

de paruam, denotabit autem α ſinum diſtantiae ſtellae a polo ecclipticae obſeruatam, alio calculo erit opus. Cum enim ſit $a = \sqrt{(1-\alpha^2)} = 1 - \frac{\alpha^2}{2}$ erit ſinus verae ſtellae latitudinis $= a - \frac{ar^2}{2cc} - \frac{\alpha abr}{c} = 1 - \frac{\alpha^2}{2} - \frac{r^2}{2cc} - \frac{\alpha br}{c}$, eiusque coſinus $= \sqrt{(\alpha^2 + \frac{r^2}{cc} + \frac{2\alpha br}{c})}$ qui erit ſinus verae diſtantiae ſtellae a polo ecclipticae.

§. 53. Si igitur ſtella in ipſo polo ecclipticae obſervetur, tum reuera ab hoc polo diſtabit angulo cuius ſinus eſt $\frac{r}{c}$, qui angulus circiter $20''$ conficit. At ſi diſtantia ſtellae a polo obſeruata fuerit circiter $20''$, vt α fere aequale ſit ipſi $\frac{r}{c}$, tum expediet veram ſtellae a polo diſtantiam definire ex eius ſinu, qui eſt $\sqrt{(\alpha^2 + \frac{r^2}{cc} + \frac{2\alpha br}{c})}$ neque ad radicis extractionem iuuabit approximatione vti. Veluti ſi ſtella obſeruetur a polo ecclipticae diſtare angulo $30''$, ſitque angulus PAQ rectus ſeu ſtella in poſteriore quadratura, erit $b = 1$ et ſinus diſtantiae verae a polo $= \alpha + \frac{r}{c}$ ſeu $50''$ ſin ſtella in priore quadratura fuerit obſeruata, erit vera diſtantia a polo $= 10''$. In coniunctione autem vel oppoſitione reperietur vera diſtantia a polo $= 36''$, cum tamen alias in oppoſitione et coniunctione latitudo vera ab obſeruata non diſcrepet.

§. 54. Videamus nunc quanam correctione longitudo ſtellae obſeruata indigeat; ſupra autem inuenimus ad angulum QAP addi debere angulum PAp, cuius tangens eſt $= \frac{\mathfrak{C}r}{a^2br + \alpha\sqrt{(c^2 - r^2 + x^2b^2r^2)}}$ tanto igitur angulo longitudo ſtellae obſeruata debebit diminui, vt prodeat eius longitudo vera ſi quidem anguli PAQ coſinus $\mathfrak{C}$ fuerit affirmatiuus, contra enim addi debet aequatio, ſi $\mathfrak{C}$ fiat negatiuum. Quoniam vero r eſt valde paruum reſpectu c fiet illius

illius anguli tangens $= \frac{\varepsilon r}{\alpha c + \alpha^2 br - \frac{\alpha r^2}{2c} + \frac{\alpha^3 b^2 r^2}{2c}}$ quae niſi ſtella proxime ad polum ecclipticae fuerit ſita abit in hanc $\frac{\varepsilon r}{\alpha c}$. Manente ergo ſtellae a polo diſtantia maxima aequatio longitudinis erit in coniunctione et oppoſitione cum ſole, illo quidem caſu addi hoc vero ſubtrahi debet angulus, cuius tangens eſt $\frac{r}{\alpha c}$: in quadraturis autem haec correctio fit nulla.

§. 55. Haec igitur correctio commode per logarithmos ſequenti modo inſtitui poterit; ad logarithmum coſinus anguli QAP addatur 1, 2942710, atque a ſumma ſubtrahatur logarithmus coſinus latitudinis ſtellae obſeruatae reſidui logarithmi quaeratur numerus reſpondens, qui dabit numerum minutorum ſecundorum addendum vel ſubtrahendum longitudini obſeruatae, prout ſtella vel coniunctioni ſolis vel oppoſitioni fuerit propior. Sic in exemplo §. 51. allato eſt ang. QAP $= 252^\circ, 21', 40''$ cuius coſinus eſt negatiuus, vnde longitudo obſeruata augeri debebit. Iſte autem coſinus congruit cum ſinu anguli $17^\circ, 38', 20''$ cuius logarith. $=$ 94814666

add.	1,2942710
auferat. log. ſin. $14^\circ, 42', 12''$	10,7757376
	9,4045158
	1,3712218

hinc aequatio prodit $23'', 30'''$, quae ad longitudinem obſeruatam addi debet, ita vt vera longitudo ſit 5 S, $13^\circ, 21', 18'', 30'''$.

§. 56. Aliter autem correctio erit inſtituenda, ſi ſtella polo ecclipticae fuerit proxima, ita vt ſinus eius

diſtantiae ab hoc polo α tam ſit paruus vt prae termino αc reliqui termini non euaneſcant, tam enim a longitudine obſeruata angulus ſubtrahi debebit, vel ad angulum QAP addi debebit angulus cuius tangens eſt $= \frac{\frac{\epsilon r}{c}}{\alpha + \frac{a^2 b r}{c}}$ Quare ſi α omnino euaneſcat, fiatque $a = 1$, anguli addendi PAp tangens erit $= \frac{\epsilon}{b}$; quare cum anguli QAP tangens ſit $= \frac{b}{\epsilon}$, fiet angulus QAp rectus. Stellae igitur in ipſo polo eclipticae viſae latitudo erit diminuenda 20. ſec. eiusque longitudo 90. gradibus ſuperabit longitudinem ſolis.

§. 57. Quaeſtio hic moueri poteſt non inelegans, qua quaeratur, quo ſitu ſtella in ipſo eclipticae polo reuera poſita quouis tempore ſpectatoribus terreſtribus apparere debeat. Quum igitur verae huius ſtellae latitudinis ſinus ſit 1, habebitur iſta aequatio $1 = \frac{a}{c}(\sqrt{(c^2 - r^2 + \alpha^2 b^2 r^2)} - abr)$ ſeu $c + aabr = a\sqrt{(c^2 - r^2 + \alpha^2 b^2 r^2)}$ vnde ſumtis quadratis fit $\alpha^2 c^2 + 2\alpha abcr + a^2 r^2 = 0$, ex qua aequatione oritur tangens diſtantiae apparentis huius ſtellae a polo eclipticae $= \frac{\alpha}{a} = \frac{-br + r\sqrt{(b^2 - 1)}}{c}$. Hinc igitur patet ſtellam talem polarem ex terra nunquam alio ſitu conſpici poſſe, niſi ſit $bb = 1$, hoc eſt niſi in quadratura cum ſole priore, quae poſt coniunctionem contingere ſolet. Hoc autem caſu fit $b = -1$ atque haec ſtella a polo angulo cuius tangens eſt $\frac{r}{c}$ ſeu angulo 20″ diſtare perpetuo obſeruabitur. Ex quo haec ſtella circa verum polum circulum ſpatio vnius anni abſoluere cernetur, cuius radius erit 20″.

§. 58.

§. 58. Diligenter igitur cauendum eſt, ne haec ſtellarum variatio annua a motu lucis ſucceſſiuo oriunda cum parallaxi confundatur. Expediet ergo ad parallaxin annuam ſtellarum fixarum commodiſſime inueſtigandam ſtella fixa vti, quae in ipſa eccliptica ſit ſita, quia eiusmodi ſtellarum latitudo non alteratur. Deinde longitudo huius ſtellae bis eſt obſeruanda eodem anno, quando ea cum ſole in quadraturis deprehenditur, his enim caſibus longitudo obſeruata a vera non diſcrepat. Ita ſi fuerit T*t* orbita terrae, S ſol et O ſtella fixa in plano ecclipticae ſita, obſeruetur ea primum in □ cum terra eſt in T angulusque OTS vel reuera rectus vel proxime; deinde obſeruetur eadem ſtella cum terra verſatur in *t* exiſtente angulo O*t*S iterum fere recto. His factis dati erunt anguli OTS et O*t*S fere recti, itemque ex theoria terrae per obſeruationes corrigenda angulus TS*t*, ex quibus definiri poterit diſtantia SO per ſemidiametros orbis magni. Tab. III. fig. 1.

§. 59. Hac igitur ratione obſeruationes ſtellarum fixarum ſunt corrigendae; alia autem correctione eſt opus pro obſeruationibus planetarum, quippe qui non quieſcent, ſed pariter ac terra circa ſolem reuoluuntur. Pertinet igitur haec correctio ad caſum quartum, quo tam obiectum quam ſpectatorem in motu collocamus. Moueatur igitur obiectum O in recta OV celeritate aequabili s ſpectator vero A promoueatur ſecundum directionem AE celeritate $= r$; ſint autem rectae OV et AE in eodem plano poſitae, quoniam haec potiſſimum ad motum planetarum ſumus accommodaturi qui fere in eodem plano circa ſolem rotantur, in quo ſita eſt orbita terrae. Emittat obiectum, dum in O verſatur radium, qui incidat in oculum ſpecta- fig. 2.

 toris

toris in A conſtituti, et hancobrem concipiatur radius O F quem obiectum emiſſurum fuiſſet celeritate c ſi in O quieuiſſet, hicque radius, poſtquam motum obiecti recepit, oculum ſpectatoris in A feriat; hoc itaque fiet; ſi fuerit completo parallelogrammo OF : OV $= c : s$; radiusque OA perueniet ad ſpectatorem celeritate $= \frac{c . AO}{OF}$.

§. 60. Radius OA autem qui in oculum A celeritate r in directione AE motum impingit, eundem praeſtat effectum, ac ſi in directione QA in oculum quiescentem incideret, exiſtente OAEQ parallelogrammo, ac OA : AE $= \frac{c.AO}{OF} : r$; vnde erit OF : AE : OV $= c : r : s$. Videbit ergo ſpectator in A obiectum in directione AQ, ideoque ſub angulo ad ſui motus directionem QAE. Dum autem radius ex obiecto in O exiſtente ad ſpectatorem vsque peruenit, ipſum interea obiectum proceſſit in V ita vt ſit OF : OV $= c : s$ ex quo ſpectator obiectum videre deberet hoc ipſo momento in directione AV; diſcrepat ergo locus a ſpectatore viſus AQ a loco vero AV angulo QAV hicque angulus erit correctio ad ſitum obſeruatum QAE addenda Quantus igitur ſit iſte angulus videamus, conſtat quidem ex duabus partibus QAO et OAV, quae addi debent, ſi quidem motus obiecti et ſpectatoris tendant in plagas contrarias, vti in figura aſſumimus.

§. 61. Sit anguli QAE, ſub quo obiectum ſpectatori apparet, ſinus $= m$, coſinus $= \mu$, ponanturque lineae OF $=$ AV $= c$; AE $=$ OQ $= r$; et AF $=$ OV $= s$. Ex O in AQ demittatur perpendiculum Op, erit $\frac{Op}{OQ} =$ ſin. OQA $=$ ſin. QAE $= m$, adeoque O$p = mr$

et

et $Qp = \mu r$. Producatur VO, donec AQ ſecet in q, ſitque anguli QOq, qui inclinationem directionum OV ad AE exprimit verſus plagam AE, ſinus $= n$, coſinus $= \nu$, erit ang. Oqp ſinus $= m\nu + \mu n$. Hinc itaque oritur $m\nu + \mu n : QO\ (r) = m : Oq\ (\frac{mr}{m\nu + \mu n})$. Nunc ex V demittatur in AQ perpendicularis VP, erit ob triangula qOp et qVP ſimilia:

$$qO : Op = qV \qquad : VP$$

$$\frac{mr}{m\nu + \mu n} : mr = \frac{mr}{m\nu + \mu n} + s : mr + s(m\nu + \mu n).$$

Vnde anguli QAV erit ſinus $= \frac{VP}{AV} = \frac{mr + s(m\nu + \mu n)}{c}$ vel ſi anguli $Vq A$, quem directio obiecti cum radio viſiuo conſtituit, dicatur ſinus $= q$ erit anguli QAV ſinus $= \frac{mr + qs}{c}$.

§. 62. Conſentit iſta formula cum omnibus praecedentibus easque tanquam caſus ſpeciales ſub ſe complectitur. Namquae ſi vti caſu primo ſpectator et obiectum quieſcant, tum ob r et $s = 0$ fit aberratio $= 0$. Atque ſi vti in caſu ſecundo ſpectator quieſcat obiectum vero in directione OV promoueatur, tum ſinus anguli QAV fit $= \frac{qs}{c}$ denotante q ſinum anguli, quem radius viſiuus AQ cum directione motus obiecti conſtituit. Denique ſi obiectum in quiete ponatur, ſpectator vero moueatur, qui erat caſus tertius, tum fit vti inuenimus ſinus anguli aberrationis QAV $= \frac{mr}{c}$. Intelligitur porro ſi r et s ſint valde paruae reſpectu ipſius c, tum angulum cuius ſinus eſt $\frac{mr + qs}{c}$ proxime fore aequalem ſummae angulorum, quorum ſinus ſint $\frac{mr}{c}$ et $\frac{qs}{c}$, ex quo correctiones quae ſeorſim cum ex motu obiecti tum ex motu ſpectatoris oriuntur, coniungere licet.

§. 63.

§. 63. Si obiectum O in eadem recta O V ſed in plagam oppoſitam $o\,q$ progrediatur, tum eius celeritas s negatiue debet accipi: atque angulus aberrationis loci apparentis a vero erit $= \frac{mr - qs}{c}$, licet enim, ſi r et s prae c ſint vehementer paruae, ipſum angulum ſeu arcum loco ſinus ſubſtituere. Fieri igitur poteſt vt aberratio evaneſcat locusque apparens cum vero congruat. Hoc ſcilicet eueniet, ſi fuerit $r : s = q : m =$ O Q : O q. At erit $r : s =$ AE : A F; Vnde recta E F erit radio A Q parallela. Ponamus directiones A E et V O concurrere in Z, erit A E : A F $=$ A Z : q Z vel O Z. Cum ergo obiectum O et ſpectator A mouentur verſus punctum Z celeritatibus rationem diſtantiarum a puncto Z proportionalibus, locus apparens cum vero congruet.

§. 64. Applicemus hanc doctrinam ad obſeruationes planetarum corrigendas, quos in circulis concentricis circa ſolem motu vniformi ferri ponamus, ipſasque orbitas in plano eclipticae ſitas; excentricitas enim, motus inaequabilitas et inclinatio orbitarum, quoniam hae res ſatis ſunt exiguae, inſenſibile diſcrimen in correctionem a motu lucis oriundam inferent. Quoniam igitur celeritates planetarum in ſuis orbitis tenent rationem reciprocam ſubduplicatam diſtantiarum a ſole, diſtantiae autem ita ſe habent vt ſit

log. diſt. ♄ a ☉ = 6,9794600
log. diſt. ♃ a ☉ = 6,7160965
log. diſt. ♂ a ☉ = 6,1829850
log. diſt. ♁ a ☉ = 6,0000000
log. diſt. ♀ a ☉ = 5,8593365
log. diſt. ☿ a ☉ = 5,5878232

celeri-

celeritates planetarum ad celeritatem lucis naturalem c applicatae ita ſe habebunt:

$$l\,\frac{c}{\text{cel. }♄} = 4,5098840$$

$$l\,\frac{c}{\text{cel. }♃} = 4,3782022$$

$$l\,\frac{c}{\text{cel. }♂} = 4,1116465$$

$$l\,\frac{c}{\text{cel. }♁} = 4,0201540$$

$$l\,\frac{c}{\text{cel. }♀} = 3,9498222$$

$$l\,\frac{c}{\text{cel. }☿} = 3,8140656$$

Vtemur enim potiſſimum logarithmis harum quantitatum, quia hoc modo ipſa correctio obſeruationum in minutis ſecundis facillime obtinetur. Denique cum hae correctiones ſint ſatis paruae, tuto affirmare poterimus planetas, dum radii ab iis ad nos vsque perueniunt, interea in directum progredi.

§. 65. Incipiamus a planetis ſuperioribus, ſitque S ſol, T terra in ſua orbita ſita atque Oo orbita planetae cuiusdam ſuperioris. Obſeruetur in terra T planeta in directione TO, ſitque celeritas terrae in directione TE ſecundum ſignorum ſeriem $= r$, celeritas planetae autem in directione tangentis OQ $= s$: noteturque punctum A quod ſoli eſt oppoſitum. Ponatur anguli OTE, ſub quo planeta conſpicitur ſinus $= m$, coſinus $= \mu$, erit ob angulum ATE rectum, μ ſinus anguli ATO, quo planeta ab oppoſi- Tab. III. fig. 3.

 tione

tione ſolis A verſus conſequentia diſtare obſeruatur, m vero erit eiusdem diſtantiae coſinus. Nunc ad angulum QOT inueniendum, quem directio radii OT cum directione motus planetae conſtituit, ſit diſtantia terrae a ſole TS $= a$, diſtantia planetae a ſole OS $= b$, erit $b :$ ſin. OTS$(\mu) = a :$ ſin. TOS $(\frac{\mu a}{b})$, vnde anguli TOQ ſinus erit $= \sqrt{(1 - \frac{\mu^2 a^2}{b^2})}$.

§. 66. Cum autem ſit ex natura motus planetarum $r : s = \frac{1}{\sqrt{a}} : \frac{1}{\sqrt{b}}$ erit $r^4 : s^4 = b^2 : a^2$, atque ſinus anguli TOQ $= \sqrt{(1 - \frac{\mu^2 s^4}{r^4})} = 1 - \frac{\mu^2 s^4}{2r^4}$ ob $r > s$ et $\mu < 1$. Sit nunc verus planetae locus TV, verusque angulus, ſub quo planeta cerni deberet VTE, ſuperans angulum apparentem OTE angulo VTO, erit anguli huius VTO ſinus $= \frac{mr}{c} - \frac{s}{c} \sqrt{(1 - \frac{\mu^2 s^4}{r^4})} = \frac{mr}{c} - \frac{s}{c} \sqrt{(1 - \frac{\mu^2 a^2}{b^2})}$. Ex quo diſtantia planetae a loco oppoſitionis ſolis A obſeruata diminui debet angulo, cuius ſinus eſt $\frac{mr}{c} - \frac{s}{c} \sqrt{(1 - \frac{\mu^2 a^2}{b^2})}$, ſeu ſi poſterior terminus priorem ſuperet, augeri debet diſtantia planetae ab oppoſitione ſolis verſus conſequentia ſumta angulo, cuius ſinus eſt $\frac{s}{c} \sqrt{(1 - \frac{\mu^2 a^2}{b^2}} - \frac{mr}{c}$. Vel, quod perinde eſt, tanto angulo longitudo planetae obſeruata augeri debet.

§. 67. Si planeta obſeruetur in ipſa oppoſitione ſolis A, fiet $\mu = 0$ et $m = 1$; vnde longitudo planetae obſeruata augeri debet angulo, cuius ſinus eſt $= \frac{s}{c} - \frac{r}{c}$, vel cum $r > s$, longitudo obſeruata diminui debet angulo, cuius ſinus eſt $\frac{r-s}{c}$, ſin planeta in coniunctione cum ſole obſeruetur, fiet $m = -1$ et $\mu = 0$, tum igitur longitudo obſeruata augeri debebit angulo, cuius ſinus eſt $\frac{s+r}{c}$: haecque erit maxima correctio adhibenda. Obſeruetur autem

tem planeta in alterutra quadratura, tum ob $m = 0$ et $\mu = \pm 1$, longitudo planetae augeri debebit angulo, cuius ſinus eſt $\frac{s}{c} \sqrt{(1 - \frac{a^2}{b^2})}$. Generatim autem haec adhibeatur regula, ſubtrahatur locus ſoli oppoſitus a loco planetae in ecclipticа obſeruatae, reſiduique arcus ſinus ponatur μ, coſinus $= m$: tum quaeratur angulus, cuius ſinus ſit $\frac{\mu a}{b}$, eiusdemque anguli coſinus ponatur $= q$: quo facto aequatio ad longitudinem planetae obſeruatam addenda erit $\frac{qs}{c} - \frac{mr}{c}$, ipſum enim arcum loco ſinus ſubſtituimus.

§. 68. Computus autem facillime inſtituetur quaerendo valores expreſſionum $\frac{qs}{c}$ et $\frac{mr}{s}$ ſeorſim, quae cum ſint ſinus vel multipla ſinuum, inſtar ſinuum conſiderari poterunt. Quia autem anguli iis ſinibus aequales quaeruntur, ſumantur logarithmi quantitatum $\frac{qs}{c}, \frac{mr}{c}$ ex tabula ſinuum ab iisque auferatur logarithmus, 4, 6855749; quo facto reſidui logarithmi in tabula logarithmorum numerorum naturalium quaeratur numerus reſpondens, qui dabit angulum quaeſitum in minutis ſecundis. Eſt autem $l\frac{c}{r} =$ 4, 0201540 et $l\frac{c}{s}$ pro dato planeta ex tabula ſuperiore debet ſumi, vnde etiam relatio diſtantiarum a et b ſeu fractio $\frac{a}{b}$ eſt petenda.

§. 69. Dum locus ſolis eſt 9 S, 15°, 37′, 45″ obſeruatur Iouis longitudo 1 S, 20°, 8′, 25″ quaeriturque longitudo vera. Ante omnia autem notandum eſt in calculo minuta ſecunda tuto negligi poſſe, quia ne minutis quidem neglectis aequatio deſiderata variatur. Calculus vero ita ſe habet

a long. ♃ — 1 S, 20°, 8′
ſubtr. ☍ ☉ — 3 S, 15°, 37′

304°, 31′ = 10 S, 4°, 31′
cuius ſinus $\mu = -$ ſin. 55°, 29′ et
coſinus $m = +$ ſin. 34°, 31′

Porro log. b = 6, 71 69065
log. a = 6, 0000000

$l\,\frac{b}{a}$ = 0, 7160965
$l\,\mu$ = 9, 9159069

$l\,\frac{\mu a}{b}$ = 9, 1998104 = log. ſinus
cui reſpond. log. coſinus ſeu $l\,q$ = 9, 9944789
atque eſt $l\,m$ = 9, 7533118
Deinde eſt $l\,\frac{c}{r}$ = 4, 0201540
et $l\,\frac{c}{s}$ = 4, 3782022

Ergo $l\,q$ = 9, 9944789
ſubtr. $l\,\frac{c}{s}$ = 4, 3782022

5, 6162767
ſubtr. 4, 6855749

0, 9307018 ergo $\frac{qs}{c}$ = 8″, 31‴

Ac $l\,m$ = 9, 7533118
ſubtr. $l\,\frac{c}{r}$ = 4, 0201540

5, 7331578
ſubtr. 4, 6855749

1, 0475829 ergo $\frac{mr}{c}$ = 11″, 6‴,

vnde $\frac{qs - mr}{c} = -$ 2″, 35‴, ex quo vera Iouis longitudo Geocentrica erit 1 S, 20°, 8′, 22″, 25‴

§. 70.

§. 70. Cum maxima differentia inter locum obſervatum et verum eueniat, cum planeta eſt in coniunctione cum ſole, videamus quanta ea ſit in tribus planetis ſuperioribus, quibus adiiciamus correctiones in quadraturis et oppoſitione adhibendas.

In coniunctione ♄ cum ☉ differentia eſt	26″, 4‴	addenda
In coniunctione ♃ cum ☉ differentia eſt	28″, 18‴	
In coniunctione ♂ cum ☉ differentia eſt	35″, 35‴	
In oppoſitione ♄ et ☉ differentia eſt	13″, 18‴	auferenda
In oppoſitione ♃ et ☉ differentia eſt	11″, 4‴	
In oppoſitione ♂ et ☉ differentia eſt	3″, 47‴	
In quadrat ♄ et ☉ differentia eſt	6″, 20‴	addenda
In quadrat ♃ et ☉ differentia eſt	8″, 28‴	
In quadrat ♂ et ☉ differentia eſt	12″, 2‴	

Inter oppoſitionem ergo et quadraturas dabitur locus, in quo aequatio eſt nulla, planetaque in vero loco conſpicitur: euenit autem hoc quando anguli ATO tangens obſeruatur $\frac{b}{\sqrt{a(a+b)}}$ idque vtrinque circa oppoſitionem.

§. 71. Reſtant nobis planetae inferiores ambo Venus et Mercurius, quorum motum apparentem vt corrigamus, ſit T locus terrae in quo habeat celeritatem r ſecundum tangentem TE ſuae orbitae: exiſtat ſol in S centro tum orbitae terrae tum etiam orbitae OAo planetae inferioris O. Sit ſemidiameter orbitae terrae ST $= a$, orbitae planetae OS $=$ AS $= b$, atque appareat planeta ſpectatori in terra conſtituto in directione TO ſub angulo OTE cuius ſinus ſit $= m$, coſinus $= \mu$. Erit ergo planetae elongationis a ſole verſus conſequentia ſeu anguli OTS Tab. III. fig. 4.

 ſinus

ſinus $= - \mu$, coſinus $= m$. Quare cum in triangulo TOS dentur latera SO $= b$, ST $= a$ et angulus STO erit $b : - \mu = a$: ſin. TOS, ſeu ſin. TOS $= \frac{-\mu a}{b}$, cuius anguli coſinus erit $= \sqrt{(1 - \frac{\mu^2 a^2}{b^2})}$ qui ſimul erit ſinus anguli TOQ, quem radius viſiuus cum directione motus planetae conſtituit.

§. 72. Exprimat s celeritatem planetae, quam habet ſecundum directionem tangentis OQ orbitae ſuae, qui motus vti in figura repraeſentatur, cum ſit motui terrae contrarius, verus planetae locus erit in directione TV angulum maiorem cum TE conſtituente, quam directio apparens OT, ex quo ad locum planetae in eccliptica obſeruatum addi debet angulus OTV cuius ſinus ſit $= \frac{mr}{c} + \frac{s}{c} \sqrt{(1 - \frac{\mu^2 a^2}{b^2})}$. Quare a loco planetae in eccliptica obſeruato ſubtrahi debet locus ſolis, arcusque reſidui coſinus ponatur $= m$; ſinus vero $= \mu$ ſiue affirmatiuus ſiue negatiuus ſit perinde eſt. Tum quaeratur angulus, cuius ſinus ſit $= \frac{\mu a}{b}$, eiusdemque coſinus ponatur $= q$, quo facto ad longitudinem planetae obſeruatam addatur angulus $\frac{mr}{c} + \frac{qs}{c}$; prodibitque longitudo planetae vera geocentrica; ac vera planetae elongatio a ſole.

§. 73. Haec ita ſe habent, quando planeta ſub directione TO viſus magis a terra remotus eſt quam ſol, ac loco B poſt ſolem in ſua orbita eſt propior; at cum planeta in eadem directione To conſpicitur, propior autem terrae eſt quam ſol, tum alia correctio eſt inſtituenda. Hoc enim caſu angulus Toq, quem directio viſa cum directione motus oq conſtituit, aequalis quidem eſt angulo

TOQ

TOQ, at quia celeritas oq conſpirat cum motu terrae erit angulus oTv, quo longitudo apparens augeri debet $= \frac{mr}{c} - \frac{s}{c} \sqrt{(1 - \frac{\mu^2 a^2}{b^2})} = \frac{mr}{c} - \frac{qs}{c}$.

§. 74. Maxima ergo aequatio locum habet, quando planeta poſt ſolem in B conſpicitur, tum enim $m = 1$ et $\mu = 0$, vnde longitudo apparens nimis eſt parua angulo $\frac{r}{c} + \frac{s}{c}$. In altera autem coniunctione qua planeta recte intra ſolem et terram conſpicitur, longitudo obſervata diminui debet angulo $\frac{s}{c} - \frac{r}{c}$, quia $s > r$. In maxima vero planetae elongatione a ſole viſa, quae proxime contingit cum $\frac{\mu^2 a^2}{b^2} = 1$ ſeu $\mu^2 = \frac{b^2}{a^2}$ et $m = \sqrt{(1 - \frac{b^2}{a^2})}$; erit aequatio longitudini obſeruatae addenda $= \frac{r}{c} \sqrt{(1 - \frac{b^2}{a^2})}$; quae ergo cum planeta in orbitae ſuae ſemiſſe AOB verſatur ad elongationem a ſole obſeruatam addi, at cum planeta in altera ſemiſſe deprehenditur ſubtrahi debet. Cum igitur vera elongatio maxima eueniat cum anguli VTS ſinus ſit vel $+ \frac{b}{a}$ vel $- \frac{b}{a}$, ſit tum anguli apparentis OTS ſinus $= \mu$ coſinus $= m$, erit $\mu + \frac{mr}{c} \sqrt{(1 - \frac{b^2}{a^2})} = \frac{b}{a}$ et $\mu = \frac{b}{a} - \frac{r}{c}(1 - \frac{b^2}{a^2})$; in altera autem elongatione maxima verſus D fiet $\mu = \frac{b}{a} + \frac{r}{c}(1 - \frac{b^2}{a^2})$. magis igitur a ſole elongari obſeruabitur verſus D quam verſus C.

§. 75. Obſeruatus ſit mercurius in eccliptica 4 S, 19°, 31′, 15″, dum ſol eſſet in 3 S, 27°, 14′, 55″, atque tum mercurius longius diſtet a terra quam ſol. Quare

a longitudine	☿	4 S, 19°, 31′
ſubtrahatur locus	☉	3 S, 27°, 15′
reſiduum		0 S, 22°, 16′

ergo

ergo $m =$ ſin. $67°, 44'$, et $\mu =$ ſin. $22°, 16'$.

Poro erit	$l\,\mu$	$=$	$9,5785450$
addatur	$l\,a$	$=$	$6,0000000$
			$15,5785450$
ſubtr.	$l\,b$	$=$	$5,5878232$
$l\frac{\mu a}{b}$		$=$	$9,9907218$
Hinc fit	$l\,q$	$=$	$9,3106849$
ſubtr.	$l\frac{c}{s}$	$=$	$3,8140656$
			$5,4966193$
auferatur			$4,6855749$
			$0,8110444$

ergo $\frac{qs}{c}$ dabit $6'', 28'''$

Cum iam ſit	$l\,m$	$=$	$9,9663437$
ſubtrah.	$l\frac{c}{r}$	$=$	$4,0201540$
			$5,9461897$
auferatur			$4,6855749$
			$1,2606148$

vnde $\frac{mr}{c}$ praebet $18'', 13'''$.

Quocirca longitudo obſeruata augeri debet angulo $\frac{mr}{c} + \frac{qs}{c} = 24'', 41'''$. At ſi mercurius terrae propior fuiſſet quam ſol, in eadem autem directione apparuiſſet, tum ad longitudinem addi deberet $\frac{mr}{c} - \frac{qs}{c} = 11'', 45'''$.

§. 76. Aequationes autem veneris et mercurii in coniunctionibus atque elongationibus maximis ita ſe habent.

In

		Aequatio	
In coniunctione ſuperiore	♀ et ☉.	42″, 50‴	add.
In coniunctione ſuperiore	☿ et ☉.	51″, 20‴	
In coniunctionn inferiore	♀ et ☉.	3″, 28‴	ſubtr.
In coniunctione inferiore	☿ et ☉.	11″, 58‴	
In elongatione max.	♀ et ☉.	13″, 36‴	add.
In elongatione max.	☿ et ☉.	18″, 9‴	

Ope regularum itaque hic traditarum obſeruationes tam ſtellarum fixarum quam planetarum ab iis erroribus, qui ex propagatione lucis ſucceſſiua oriuntur, poſſunt liberari, earumque loco vera ſiderum loca geocentrica quidem definiri. Neque vero in his determinationibus multum inter eſt vtra hypotheſis propagationis lucis aſſumatur, cum diſcrimen oriatur inſenſibile. Ceterum ſi lux vel celerius vel tardius propagetur, quam hic aſſumſimus, omnes aberrationes in eadem ratione debebunt vel diminui vel augeri. Denique ſi lux tempore opus habet definito, quo per datum interuallum transuehatur, nullum ſyſtema mundi, in quo terra immota ponitur, conſiſtere poteſt; id quod nouum eſt argumentum pro hypotheſi Copernicana.

METHODVS FACILIS
COMPVTANDI ANGVLORVM
SINVS AC TANGENTES
TAM NATVRALES QVAM ARTIFICIALES

AVCTORE
Leonhardo Eulero.

§. 1.

Expoſui anno praeterito methodum inueniendi valores eiusmodi expreſſionum, quae ſint producta ex infinitis factoribus certa quadam lege progredientibus, eaque methodus deducta erat ex formulis integralibus, quarum integratio a ſe inuicem pendet. Nunc autem, cum nuper expoſuiſſem modum ſummandi huiusmodi ſeries

$$\frac{1}{1 \pm p} \pm \frac{1}{4 \pm p} + \frac{1}{9 \pm p} \pm \frac{1}{16 \pm p} + \frac{1}{25 \pm p} \pm \text{etc.}$$

ex eo nactus ſum commodam atque aptam methodum quam plurimorum productorum, ex infinitis factoribus conſtantium, valores determinandi, eiusque beneficio mihi licuit innumerabiles iſtiusmodi expreſſiones definire, quae per alteram mothodum vel omnino tractari non poterant, vel ſaltem tam expedite et concinne non abſoluuntur. Quod negotium, quo clarius ob oculos ponatur, in ſequentibus problematis ſum complexurus.

Problema. 1.

§. 2. Inuenire valorem huius expreſſionis per continuos factores in infinitum progredientis.

1 +

$$\frac{1+p}{1}\cdot\frac{4+p}{4}\cdot\frac{9+p}{9}\cdot\frac{16+p}{16}\cdot\frac{25+p}{25}\cdot\frac{36+p}{36}\cdot \text{etc.}$$

Solutio.

Ponatur huius expreſſionis propoſitae valor quaeſitus $= s$, et ſumtis logarithmis, erit $ls = l(1+p) + l(1+\frac{p}{4}) + l(1+\frac{p}{9}) + l(1+\frac{p}{16}) + l(1+\frac{p}{25}) + l(1+\frac{p}{36}) + \text{etc.}$ His igitur logarithmis per ſeries notas expreſſis habebitur

$$\begin{aligned} ls = &+\tfrac{p}{1} - \tfrac{p^2}{2} + \tfrac{p^3}{3} - \tfrac{p^4}{4} + \tfrac{p^5}{5} - \tfrac{p^6}{6} + \text{etc.}\\ &+\tfrac{p}{4} - \tfrac{p^2}{2\cdot 4^2} + \tfrac{p^3}{3\cdot 4^3} - \tfrac{p^4}{4\cdot 4^4} + \tfrac{p^5}{5\cdot 4^5} - \tfrac{p^6}{6\cdot 4^6} + \text{etc.}\\ &+\tfrac{p}{9} - \tfrac{p^2}{2\cdot 9^2} + \tfrac{p^3}{3\cdot 9^3} - \tfrac{p^4}{4\cdot 9^4} + \tfrac{p^5}{5\cdot 9^5} - \tfrac{p^6}{6\cdot 9^6} + \text{etc.}\\ &+\tfrac{p}{16} - \tfrac{p^2}{2\cdot 16^2} + \tfrac{p^3}{3\cdot 16^3} - \tfrac{p^4}{4\cdot 16^4} + \tfrac{p^5}{5\cdot 16^5} - \tfrac{p^6}{6\cdot 16^6} + \text{etc.}\\ &\qquad\text{etc.}\end{aligned}$$

Sumantur differentia; eritque

$$\begin{aligned} \frac{ds}{sdp} = &\ 1 - p + p^2 - p^3 + p^4 - p^5 + \text{etc.}\\ &+\tfrac{1}{4} - \tfrac{p}{4^2} + \tfrac{p^2}{4^3} - \tfrac{p^3}{4^4} + \tfrac{p^4}{4^5} - \tfrac{p^5}{4^6} + \text{etc.}\\ &+\tfrac{1}{9} - \tfrac{p}{9^2} + \tfrac{p^2}{9^3} - \tfrac{p^3}{9^4} + \tfrac{p^4}{9^5} - \tfrac{p^5}{9^6} + \text{etc.}\\ &+\tfrac{1}{16} - \tfrac{p}{16^2} + \tfrac{p^2}{16^3} - \tfrac{p^3}{16^4} + \tfrac{p^4}{16^5} - \tfrac{p^5}{16^6} + \text{etc.}\\ &\qquad\text{etc.}\end{aligned}$$

Cum nunc hae ſeries omnes ſint geometricae, ſummari poterunt, hocque facto prodibit

$$\frac{ds}{sdp} = \frac{1}{1+p} + \frac{1}{4+p} + \frac{1}{9+p} + \frac{1}{16+p} + \frac{1}{25+p} + \text{etc.}$$

Huius autem ſeriei ſummam nuper exhibui; vnde ſi circuli cuius diameter $= 1$, peripheria ponatur $= \pi$ erit $\frac{ds}{sdp} = \frac{\pi\sqrt{p}-1}{2p} + \frac{\pi\sqrt{p}}{p(e^{2\pi\sqrt{p}}-1)}$. Ponatur facilitatis gratia $p = qq$, erit $dp = 2q\,dq$, atque aequatio inuenta abibit in hanc

 $\frac{ds}{s} =$

$\frac{ds}{s} = \pi dq - \frac{dq}{q} + \frac{2\pi dq}{e^{2\pi q} - 1} = -\pi dq - \frac{dq}{q} + \frac{2 e^{2\pi q} \pi dq}{e^{2\pi q} - 1}$

Cuius integrale eſt $l s = lC - \pi q - lq + l(e^{2\pi q} - 1)$ ſeu $s = \frac{C(e^{2\pi q} - 1)}{e^{\pi q} q} = \frac{C(e^{2\pi\sqrt{p}} - 1)}{e^{\pi\sqrt{p}}\sqrt{p}}$, vbi conſtantem C ita determinari oportet, vt poſito p vel $q = 0$ fiat $l s = 0$. At facto $q = 0$, fit $e^{2\pi q} - 1 = 2\pi q$, ideoque $l s = 0 = l C - \pi q - lq + l 2\pi q = l C + l 2\pi$, ergo $C = \frac{1}{2\pi}$. Conſequenter expreſſionis propoſitae

$\frac{1+p}{1} \cdot \frac{4+p}{4} \cdot \frac{9+p}{9} \cdot \frac{16+p}{16} \cdot \frac{25+p}{25} \cdot \frac{36+p}{36}$. etc.

valor erit $= \frac{e^{2\pi\sqrt{p}} - 1}{2e^{\pi\sqrt{p}}\pi\sqrt{p}}$. Q. E. I.

Coroll. 1.

§. 3. Quodſi loco p ponatur $4p$, habebitur iſta expreſſio:

$\frac{1+4p}{1} \cdot \frac{1+p}{1} \cdot \frac{9+4p}{9} \cdot \frac{4+p}{4} \cdot \frac{25+4p}{25} \cdot \frac{9+p}{9}$. etc.

cuius igitur valor erit $\frac{e^{4\pi\sqrt{p}} - 1}{4e^{2\pi\sqrt{p}}\pi\sqrt{p}}$.

Coroll. 2.

§. 4. Cum iam in hac expreſſione praecedens contineatur, diuidatur haec per illam, prodibitque

$\frac{1+4p}{1} \cdot \frac{9+4p}{9} \cdot \frac{25+4p}{25} \cdot \frac{49+4p}{49}$. etc.

cuius proinde valor eſt $\frac{e^{2\pi\sqrt{p}} + 1}{2e^{\pi\sqrt{p}}}$.

Coroll.

Coroll. 3.

§. 5. Hinc igitur nanciſcimur valorem huius expreſſionis propoſitae affinis:

$$\frac{1+p}{1}\cdot\frac{9+p}{9}\cdot\frac{25+p}{25}\cdot\frac{49+p}{49}\cdot\frac{81+p}{81}\cdot\text{etc.}$$

quippe cuius valor erit $= \frac{e^{\pi\sqrt{p}}+1}{2e^{\frac{1}{2}\pi\sqrt{p}}}$.

Coroll. 4.

§. 6. Diuidatur per hanc ipſa expreſſio propoſita, fiet

$$\frac{4+p}{4}\cdot\frac{16+p}{16}\cdot\frac{36+p}{36}\cdot\frac{64+p}{64}\cdot\frac{100+p}{100}\cdot\text{etc.}$$

huius ſcilicet valor erit $= \frac{e^{\pi\sqrt{p}}-1}{e^{\frac{1}{2}\pi\sqrt{p}}\pi\sqrt{p}}$.

Coroll. 5.

§. 7. Si nunc expreſſio §. 5. per expreſſionem §. 6. diuidatur, prodibit haec forma

$$\frac{1+p}{1}\cdot\frac{4}{4+p}\cdot\frac{9+p}{9}\cdot\frac{16}{16+p}\cdot\frac{25+p}{25}\cdot\frac{36}{36+p}\cdot\text{etc.}$$

cuius valor erit $= \frac{(e^{\pi\sqrt{p}}+1)\pi\sqrt{p}}{2(e^{\pi\sqrt{p}}-1)}$.

Coroll. 6.

§. 8 Si ſumantur binae huiusmodi ſeries, atque altera per alteram diuidatur, obtinebuntur ſequentes ſummationes.

$$\frac{1+p}{1+q}\cdot\frac{4+p}{4+q}\cdot\frac{9+p}{9+q}\cdot\frac{16+p}{16+q}\cdot\text{etc.} = \frac{e^{\pi\sqrt{q}}(e^{2\pi\sqrt{p}}-1)\sqrt{q}}{e^{\pi\sqrt{p}}(e^{2\pi\sqrt{q}}-1)\sqrt{p}}$$

$$\frac{1+p}{1+q}\cdot\frac{4+q}{4+p}\cdot\frac{9+p}{9+q}\cdot\frac{16+q}{16+p}\cdot\text{ etc.}=\frac{(e^{\pi\sqrt{p}}+1)(e^{\pi\sqrt{q}}-1)\sqrt{p}}{(e^{\pi\sqrt{p}}-1)(e^{\pi\sqrt{q}}+1)\sqrt{q}}$$

$$\frac{1+p}{1+q}\cdot\frac{9+p}{9+q}\cdot\frac{25+p}{25+q}\cdot\text{ etc.}=\frac{e^{\frac{1}{2}\pi\sqrt{q}}(e^{\pi\sqrt{p}}+1)}{e^{\frac{1}{2}\pi\sqrt{p}}(e^{\pi\sqrt{q}}+1)}$$

$$\frac{4+p}{4+q}\cdot\frac{16+p}{16+q}\cdot\frac{36+p}{36+q}\cdot\text{etc.}=\frac{e^{\frac{1}{2}\pi\sqrt{q}}(e^{\pi\sqrt{p}}-)\sqrt{q}}{e^{\frac{1}{2}\pi\sqrt{p}}(e^{\pi\sqrt{q}}-1\sqrt{p}}.$$

§. 9. Ex ſolutione igitur huius primi problematis conſequuti ſumus valores eiusmodi productorum infinitis fractionibus contentorum, quarum tam numeratores quam denominatores ſunt qnadrata vel numerorum omnium in ſerie naturali prpgredientium, vel imparium tantum vel parium, eaque datis numeris aucta. Cum igitur iſtiusmodi factores in ſimplices reales, qui arithmeticam teneant progreſſionem, reſolui nequeant, iſtae ſummationes methcdo iam ante expoſita abſolui non poterunt. At viciſſim hinc non intelligitur, quinam prodituri ſint valores, ſi vel p vel q negatiue accipiatur ob exponentes $\pi\sqrt{p}$ et $\pi\sqrt{q}$, qui hoc caſu fiunt imaginarii. Quamobrem hos caſus in ſequenti problemate euoluemus.

Problema 2.

§. 1. Inuenire valorem huius expreſſionis per continuos factores in infinitum progredientis

$$\frac{1-p}{1}\cdot\frac{4-p}{4}\cdot\frac{9-p}{9}\cdot\frac{16-p}{16}\cdot\frac{25-p}{25}\cdot\frac{36-p}{36}\cdot\text{ etc.}$$

Solutio.

Ponatur valor quaeſitus $=s$, eritque logarithmis ſumendis,

$$ls=l(1-p)+l(1-\tfrac{p}{4})+l(1-\tfrac{p}{9})+l(1-\tfrac{p}{16})+l(1-\tfrac{p}{25})+\text{ etc.}$$

His

His vero logarithmis in ſeries conuerſis habebitur:

$$l\,s = -\tfrac{p}{1} - \tfrac{p^2}{2} - \tfrac{p^3}{3} - \tfrac{p^4}{4} - \tfrac{p^5}{5} - \text{etc.}$$
$$- \tfrac{p}{4} - \tfrac{p^2}{2\cdot 4^2} - \tfrac{p^3}{3\cdot 4^3} - \tfrac{p^4}{4\cdot 4^4} - \tfrac{p^5}{5\cdot 4^5} - \text{etc.}$$
$$- \tfrac{p}{9} - \tfrac{p^2}{2\cdot 9^2} - \tfrac{p^3}{3\cdot 9^3} - \tfrac{p^4}{4\cdot 9^4} - \tfrac{p^5}{5\cdot 9^5} - \text{etc.}$$
$$\text{etc.}$$

Sumtisque differentialibus prodibit:

$$\frac{-ds}{s\,dp} = +1 + p + p^2 + p^3 + p^4 + \text{etc.}$$
$$+ \tfrac{1}{4} + \tfrac{p}{4^2} + \tfrac{p^2}{4^3} + \tfrac{p^3}{4^4} + \tfrac{p^4}{4^5} + \text{etc.}$$
$$+ \tfrac{1}{9} + \tfrac{p}{9^2} + \tfrac{p^2}{9^3} + \tfrac{p^3}{9^4} + \tfrac{p^4}{9^5} + \text{etc.}$$
$$\text{etc.}$$

Quae ſeries cum ſingulae ſint geometricae, ſummae illarum loco ſubſtituantur, hincque erit

$$\frac{-ds}{sdp} = \frac{1}{1-p} + \frac{1}{4-p} + \frac{1}{9-p} + \frac{1}{16-p} + \frac{1}{25-p} + \text{etc.}$$

At iſtius ſeriei ſummam nuper elicui, quae, ſi ſubſtituatur, orietur

$$-\frac{ds}{sdp} = \frac{1}{2p} - \frac{\pi\sqrt{p}}{2p\,tang.\,A\,\pi\sqrt{p}}$$

Sit commodi ergo $p = qq$ eritque

$$-\frac{ds}{s} = \frac{dq}{q} - \frac{\pi dq}{tang.\,A\,\pi q} = \frac{dq}{q} - \frac{\pi dq\ coſ.\,A.\,\pi q}{ſin.\,A\,\pi q}$$

Quoniam nunc eſt d. ſin. A . $\pi q = \pi dq$ coſ. A . πq, erit integrale aequationis inuentae,

$lC - ls = lq - l$ ſin. A . πq; conſtante autem C ita definita vt facto p vel $q = 0$ euaneſcat $l\,s$ prodibit $lC = lq - l\pi q = -l\pi$. Quocirca erit $\frac{1}{\pi s} = \frac{q}{ſin.\,A.\,\pi q} = \frac{\sqrt{p}}{ſin.\,A.\,\pi\sqrt{p}}$ hincque $s = \frac{ſin.\,A\,.\,\pi\sqrt{p}}{\pi\sqrt{p}}$ ſiue

$$\frac{1-p}{1}\cdot\frac{4-p}{4}\cdot\frac{9-p}{9}\cdot\frac{16-p}{16}\cdot\frac{25-p}{25}\cdot\text{etc.} = \frac{ſin.\,A\,.\,\pi\sqrt{p}}{\pi\sqrt{p}}.$$

Q. E. I.

Coroll. 1.

Coroll. 1.

§. 11. Quodſi loco p ponatur $4p$, habebitur iſta expreſſio:

$$\frac{1-4p}{1} \cdot \frac{1-p}{1} \cdot \frac{9-4p}{9} \cdot \frac{4-p}{4} \cdot \frac{25-4p}{25} \cdot \text{etc.}$$

cuius valor erit $= \frac{\text{ſin. A} \cdot 2\pi\sqrt{p}}{2\pi\sqrt{p}} = \frac{\text{ſin. A} \cdot \pi\sqrt{p} \cdot \text{coſ. A} \cdot \pi\sqrt{p}}{\pi\sqrt{p}}$.

Coroll. 2.

§. 12. Diuidatur haec ſeries per illam, prodibitque $\frac{1-4p}{1} \cdot \frac{9-4p}{9} \cdot \frac{25-4p}{25} \cdot \text{etc.} = \text{coſ. A} \cdot \pi\sqrt{p}$ ſiue $\frac{1-p}{1} \cdot \frac{9-p}{9} \cdot \frac{25-p}{25} \cdot \text{etc.} = \text{coſ. A} \cdot \frac{\pi\sqrt{p}}{2}$.

Coroll. 3.

§. 13. Cum iam ſit $\frac{1-p}{1} \cdot \frac{4-p}{4} \cdot \frac{9-p}{9} \cdot \frac{16-p}{16} \cdot \text{etc.} =$

$$\frac{\text{ſin. A} \cdot \pi\sqrt{p}}{\pi\sqrt{p}} = \frac{2\ \text{ſin. A}\ \frac{1}{2}\pi\sqrt{p} \cdot \text{coſ. A} \cdot \frac{1}{2}\pi\sqrt{p}}{\pi\sqrt{p}}$$ erit

$$\frac{4-p}{4} \cdot \frac{16-p}{16} \cdot \frac{36-p}{36} \cdot \frac{64-p}{64} = \frac{2\ \text{ſin. A} \cdot \frac{1}{2}\pi\sqrt{p}}{\pi\sqrt{p}}.$$

Coroll. 4.

§. 14. Diuidatur per hanc expreſſionum praecendens orietur.

$$\frac{1-p}{1} \cdot \frac{4}{4-p} \cdot \frac{9-p}{9} \cdot \frac{16}{16-p} \cdot \frac{25-p}{25} \cdot \frac{36}{36-p} \quad \text{etc.}$$

cuius valor erit $= \frac{\pi\sqrt{p}}{2\ \text{tang. A}\ \frac{1}{2}\pi\sqrt{p}}$.

Coroll.

Coroll. 5.

§. 15. Si ſumantur binae huiusmodi ſeries, earumque altera per alteram diuidatur, obtinebuntur ſequentes ſummationes.

$$\frac{1-p}{1-q}\cdot\frac{4-p}{4-q}\cdot\frac{9-p}{9-q}\cdot\frac{16-p}{16-q}\text{ etc} = \frac{\sqrt{q}\,\text{ſin. A. }\pi\sqrt{p}}{\sqrt{p}\,\text{ſin. A. }\pi\sqrt{q}}$$

$$\frac{1-p}{1-q}\cdot\frac{4-q}{4-p}\cdot\frac{9-p}{9-q}\cdot\frac{16-q}{16-p}\text{ etc.} = \frac{\sqrt{p}\,\text{tang. A. }\tfrac{1}{2}\pi\sqrt{q}}{\sqrt{q}\,\text{tang. A. }\tfrac{1}{2}\pi\sqrt{p}}$$

$$\frac{1-p}{1-q}\cdot\frac{9-p}{9-q}\cdot\frac{25-p}{25-q}\cdot\frac{49-p}{49-q}\text{. etc.} = \frac{\text{coſ. A. }\tfrac{1}{2}\pi\sqrt{p}}{\text{coſ. A. }\tfrac{1}{2}\pi\sqrt{q}}$$

$$\frac{4-p}{4-q}\cdot\frac{16-p}{16-q}\cdot\frac{36-p}{36-q}\cdot\frac{64-p}{46-q}\text{. etc.} = \frac{\sqrt{q}\,\text{ſin. A. }\tfrac{1}{2}\pi\sqrt{p}}{\sqrt{p}\,\text{ſin. A. }\tfrac{1}{2}\pi\sqrt{q}},$$

§. 16. In his expreſſionibus ſinus, coſinus et tangentes referuntur ad ſinum totum $= 1$, ſeu arcus circulares in circulo ſunt capiendi, cuius ſemidiameter eſt $= 1$. In tali igitur circulo exprimet π ſemiſſem peripheriae ſeu arcum 180. graduum. In numeris autem proximis erit, vt conſtat,

$\pi = 3,14159265357989$

Quodſi vero $\sqrt{p}$ et $\sqrt{q}$ fuerint numeri rationales, tum ſinus et tangentes, geometrice poterunt exhiberi, erit ſcilicet

ſin. A. $\pi = 0$	ſin. A. $\tfrac{1}{2}\pi = 1$	ſin. A. $\tfrac{1}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}$	ſin. A. $\tfrac{1}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}$
coſ. A. $\pi = -1$	coſ. A. $\tfrac{1}{2}\pi = 0$	coſ. A. $\tfrac{1}{3}\pi = \tfrac{1}{2}$	coſ. A. $\tfrac{1}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}$
tang. A. $\pi = 0$	tang. A. $\tfrac{1}{2}\pi = \infty$	tang. A. $\tfrac{1}{3}\pi = \sqrt{3}$	tang. A. $\tfrac{1}{4}\pi = 1$.

§. 17. Expreſſionum harum vſus primum in hoc conſiſtit, vt earum ope peripheria circuli multifariam

per iſtiusmodi producta continua concinne poſſit exhiberi. Quod vt appareat ponamus $p = \frac{m^2}{n^2}$ et cum π ſit arcus 180. graduum erit per §. 10.

$$\frac{n^2-m^2}{n^2} \cdot \frac{4n^2-m^2}{4n^2} \cdot \frac{9n^2-m^2}{9n^2} \cdot \frac{16n^2-m^2}{16n^2} \text{ etc.} = \frac{n \text{ ſin. A. } \frac{m}{n}\, 180^\circ}{m\pi}$$

ſeu

$$\pi = \frac{n}{m} \text{ ſin. A. } \frac{m}{n}\, 180^\circ \, \frac{n^2}{n^2-m^2} \cdot \frac{4n^2}{4n^2-m^2} \cdot \frac{9n^2}{9n^2-m^2} \cdot \frac{16n^2}{16n^2-m^2} \cdot \text{etc.}$$

vnde emergunt ſequentes pro valore ipſius π expreſſiones.

Si $m = 1$, $n = 2$

$$\pi = 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{16}{15} \cdot \frac{36}{35} \cdot \frac{64}{63}, \frac{100}{99} \cdot \frac{144}{143} \cdot \text{ etc.}$$

ſeu $\pi = 2 \cdot \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 12}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 13}$ etc.

quae eſt ipſa expreſſio Walliſii alibi a me demonſtrata.

Si $m = 1$ et $n = 3$

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{36}{35} \cdot \frac{81}{80} \cdot \frac{144}{143} \cdot \frac{225}{224} \text{ etc. ſeu}$$

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 15 \cdot 15}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 16} \text{ etc.}$$

Si $m = 1$ etc. $n = 4$

$$\pi = 2\sqrt{2} \cdot \frac{16}{15} \cdot \frac{64}{63} \cdot \frac{144}{143} \cdot \frac{256}{255} \cdot \text{etc. ſeu}$$

$$\pi = 2\sqrt{2} \cdot \frac{4 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 16 \cdot 16 \cdot 20 \cdot 20}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 21} \text{ etc.}$$

Si $m = 1$ et $n = 6$

$$\pi = 3 \cdot \frac{36}{35} \cdot \frac{144}{143} \cdot \frac{324}{323} \cdot \frac{576}{575} \text{ etc. ſeu}$$

$$\pi = 3 \cdot \frac{6 \cdot 6 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 18 \cdot 18 \cdot 24 \cdot 24}{5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 25} \text{ etc.}$$

§. 18. Expreſſiones hae, quanquam ſatis cito convergunt, tamen ſunt aptiores ad logarithmum ipſius π inueniendum, quam ad ipſum valorem π. Ita erit ex vltima expreſſione

$$l\,\pi = l\,3 + l\,\tfrac{36}{35} + l\,\tfrac{144}{143} + l\,\tfrac{324}{323} + \text{etc. ſeu}$$

$$l\,\pi = l\,3 + \tfrac{1}{6^2}\left(1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{25} + \text{etc.}\right)$$

$$+ \tfrac{1}{2 \cdot 6^4}\left(1 + \tfrac{1}{4^2} + \tfrac{1}{9^2} + \tfrac{1}{16^2} + \tfrac{1}{25^2} + \text{etc.}\right)$$

+

$$+\frac{1}{3\cdot 6^6}\left(1+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{9^3}+\frac{1}{16^3}+\frac{1}{25^3}+\text{ete.}\right)$$
$$+\frac{1}{4\cdot 6^8}\left(1+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{9^4}+\frac{1}{16^4}+\frac{1}{25^4}+\text{etc.}\right)$$
etc.

vnde calculus ſequenti modo inſtituetur ad logarithmum hyperbolicum ipſius π inueniendum

$l\,3 = 1,098612288668$

$l\,\frac{36}{35} = 0,028170876966$

$0,017914835217 = \frac{1}{6^2}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\text{etc.}\right)$

$0,000031760507 = \frac{1}{2\cdot 6^4}\left(\frac{1}{4^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{16^2}+\text{etc.}\right)$

$0,000000123907 = \frac{1}{3\cdot 6^6}\left(\frac{1}{4^3}+\frac{1}{9^3}+\frac{1}{16^3}+\text{etc.}\right)$

$0,000000000607 = \frac{1}{4\cdot 6^8}\left(\frac{1}{4^4}+\frac{1}{9^4}+\frac{1}{16^4}+\text{etc.}\right)$

4

$l\,\pi = 1,144729885879$

Logarithmus hic hyperbolicus ſi multiplicetur per

0,434294481903251

prodibit logarithmus communis valoris π ſeu numeri

3,14159265357989 etc.

qui logarithmus a Cl. Sharpio in Tabulis mathematicis computatus eſt

0,49714,98726,94133,85435,12682,88290 etc.

§. 19. Cum autem peripheria circuli per ſe ſatis ſit cognita ex approximationibus iam diligentiſſime peractis, vſui harum expreſſionum in hoc negotio ſuperſedebimus. Alter autem vſus, qui ex his expreſſionibus duci poteſt, conſiſtit in inueniendis ſinibus et tangentibus et ſecantibus quorumcunque angulorum, qua quidem in re opus eſt

 noſſe

noſſe valorem ipſius π. Ita ſi ponamus $\pi = 2\,q$ ita vt ſit q arcus 90 graduum erit

$$\text{ſin. A} \cdot \frac{m}{n} q = \frac{m}{n} q \cdot \frac{4n^2-m^2}{4n^2} \cdot \frac{16n^2-m^2}{16n^2} \cdot \frac{36n^2-m^2}{36n^2} \cdot \frac{64n^2-m^2}{64n^2} \text{ etc.}$$

hincque

$$\text{coſec. A} \cdot \frac{m}{n} q = \frac{n}{mq} \cdot \frac{4n^2}{4n^2-m^2} \cdot \frac{16n^2}{16n^2-m^2} \cdot \frac{36n^2}{36n^2-m^2} \cdot \frac{64n^2}{64n^2-m^2} \text{ etc.}$$

Porro ex §. 12. poſito $\sqrt{p} = \frac{m}{n}$ habebitur

$$\text{coſ. A} \cdot \frac{m}{n} q = \frac{n^2-m^2}{n^2} \cdot \frac{9n^2-m^2}{9n^2} \cdot \frac{25n^2-m^2}{25n^2} \cdot \frac{49n^2-m^2}{49n^2} \text{ etc.}$$

hincque

$$\text{ſec. A} \cdot \frac{m}{n} q = \frac{n^2}{n^2-m^2} \cdot \frac{9n^2}{9n^2-m^2} \cdot \frac{25n^2}{25n^2-m^2} \cdot \frac{49n^2}{49n^2-m^2} \text{ etc.}$$

Denique ex §. 14. deducitur pari modo

$$\text{tang. A} \cdot \frac{m}{n} q = \frac{m}{n} q \cdot \frac{n^2}{n^2-m^2} \cdot \frac{4n^2-m^2}{4n^2} \cdot \frac{9nn}{9n^2-m^2} \cdot \frac{16n^2-m^2}{16n^2} \text{ etc.}$$

hincque

$$\text{cot. A} \cdot \frac{m}{n} q = \frac{n}{mq} \cdot \frac{n^2-m^2}{n^2} \cdot \frac{4n^2}{4n^2-m^2} \cdot \frac{9n^2-m^2}{9n^2} \cdot \frac{16n^2}{16n^2-m^2} \text{ etc.}$$

Hae vero formulae, etſi vehementer conuergunt, tamen multo ſunt aptiores ad logarithmos ſinuum, tangentium et ſecantium inueniendos; quem vſum ſingularem antequam exponamus, methodum facilem aperiemus, ipſos ſinus et tangentes expedite computandi: idque ſine conſuetis ſubſidiis ex multiplicatione arcuum, aliisque huc pertinentibus theorematis.

Problema 3.

§. 20. Inuenire canonem generalem, ad ſinus et coſinus angulorum quorumcunque inueniendos idoneum.

Solutio.

Formulae, quas hic pro ſinibus et coſinibus exhibuimus, ſi euoluantur, recidunt ad formulas iam pridem notas; ſcilicet poſito arcu circuli $= s$, fit

ſin. A

ſin. A . $s = s - \frac{s^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{s^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{s^7}{1 \cdot 2 \cdots 7} +$ etc.

coſ. A . $s = 1 - \frac{s^2}{1 \cdot 2} + \frac{s^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{s^6}{1 \cdot 2 \cdots 6} +$ etc.

poſito ſinu toto $= 1$. Quodſi ergo ponatur q pro arcu 90. graduum, ſumaturque arcus propoſitus $s = \frac{m}{n} q$, fiet

ſin. A . $\frac{m}{n} q = \frac{m}{n} \cdot q - \frac{m^3}{n^3} \cdot \frac{q^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{m^5}{n^5} \cdot \frac{q^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} -$ etc.

coſ. A . $\frac{m}{n} q = 1 - \frac{m^2}{n^2} \cdot \frac{q^2}{1 \cdot 2} + \frac{m^4}{n^4} \cdot \frac{q^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} -$ etc.

Cum igitur ſit $q = \frac{\pi}{2}$ erit

$q = 1,5707963267948966192313216916$

Hoc vero valore loco poteſtatum ipſius q computato ac ſubſtituto, obtinebuntur formulae numericae, quibus tam ſinus quam coſinus arcus $\frac{m}{n} q$ exprimentur. Quoniam vero tantum pro arcubus 45° minoribus ſinus et coſinus deſiderantur erit $\frac{m}{n} < \frac{1}{2}$, et hanc ob rem ſeries datae maxime conuergent. Supputaui ego autem ſingulos harum ſerierum terminos a ſolo q pendentes in fractionibus decimalibus ad 28. figuras, quas, vt alios calculo tam taedioſo liberem, hic appono.

Erit igitur ſinus arcus $\frac{m}{n}$ 90 graduum $=$

$+ \frac{m}{n} \cdot 1,5707963267948966192313216916$

$- \frac{m^3}{n^3} \cdot 0,6459640975062462536557565636$

$+ \frac{m^5}{n^5} \cdot 0,0796926262461670451205055487$

$- \frac{m^7}{n^7} \cdot 0,0046817541353186881006854633$

$+ \frac{m^9}{n^9} \cdot 0,0001604411847873598218726605$

$- \frac{m^{11}}{n^{11}} \cdot 0,0000035988432352120853404580$

$+ \frac{m^{13}}{n^{13}} \cdot 0,0000000569217292196792681170$

$- \frac{m^{15}}{n^{15}} \cdot 0,0000000006688035109811467225$

$+ \frac{m^{17}}{n^{17}} \cdot 0,0000000000060669357311061950$

$- \frac{m^{19}}{n^{19}} \cdot 0,0000000000000437706546731370$

$+ \frac{m^{21}}{n^{21}} \cdot 0,0000000000000002571422892855$

$- \frac{m^{23}}{n^{23}} \cdot 0,0000000000000000012538995403$

$+ \frac{m^{25}}{n^{25}} \cdot 0,0000000000000000000051564550$

$- \frac{m^{27}}{n^{27}} \cdot 0,0000000000000000000000181239$

$+ \frac{m^{29}}{n^{29}} \cdot 0,0000000000000000000000000549$

$- \frac{m^{31}}{n^{31}} \cdot 0,0000000000000000000000000001$

Atque ſimili modo erit coſinus arcus $\frac{m}{n}$ 90 grad. $=$

$+ \quad 1,0000000000000000000000000000$

$- \frac{m^{2}}{n^{2}} \cdot 1,2337005501361698273543113745$

$+ \frac{m^{4}}{n^{4}} \cdot 0,2536695079010480136365633659$

$- \frac{m^{6}}{n^{6}} \cdot 0,0208634807633529608730516364$

$+ \frac{m^{8}}{n^{8}} \cdot 0,0009192602748394265802417158$

$- \frac{m^{10}}{n^{10}} \cdot 0,0000252020423730606054810526$

$+ \frac{m^{12}}{n^{12}} \cdot 0,0000004710874778818171503665$

$- \frac{m^{14}}{n^{14}} \cdot 0,0000000063866030837918522408$

$+ \frac{m^{16}}{n^{16}} \cdot 0,0000000000656596311497947230$

$- \frac{m^{18}}{n^{18}} \cdot 0,0000000000005294400200734620$

$+ \frac{m^{20}}{n^{20}} \cdot 0,0000000000000034377391790981$

$- \frac{m^{22}}{n^{22}} \cdot 0,0000000000000000183599165212$

$+ \frac{m^{24}}{n^{24}} \cdot 0,0000000000000000000820675327$

$- \frac{m^{26}}{n^{26}} \cdot 0,0000000000000000000003115285$

$+ \frac{m^{28}}{n^{28}} \cdot 0,0000000000000000000000010165$

$- \frac{m^{30}}{n^{30}} \cdot 0,0000000000000000000000000026$

Quo-

Quocunque igitur angulo propoſito, eius ratio ad 90° eſt primum quaerenda, quae ſit vt m ad n, qua inuenta, ſi in his formulis fiat ſubſtitutio debito modo, reperietur tam ſinus quam coſinus anguli propoſiti.

Q. E. I.

§. 21. Quodſi igitur ponatur $\frac{m}{n} = 1$, prior formula dare debebit ſinum totum $= 1$, quod vt appareat calculum ſubiiciamus.

```
+ 1,5707963267948966192313216916
− 0,6459640975062462536557565636
──────────────────────────────────
+ 0,9248322292886503655755651280
+ 0,0796926262461670451205055487
──────────────────────────────────
+ 1,0045248555348174106960706767
−      4681754135318688100685463 3
──────────────────────────────────
+ 0,9998431013994987225953852134
+      160441184787359821872660 5
──────────────────────────────────
+ 1,0000035425842860824172578739
−         3598843235212085340458 0
──────────────────────────────────
+ 0,9999999437410508703319174159
+             569217292196792681170
──────────────────────────────────
+ 1,0000000006627800900111855329
−                66880351098114672 25
──────────────────────────────────
+ 0,9999999999993976579030038 5104
+                  606693573110619 50
──────────────────────────────────
+ 1,0000000000000435147611430054
−                    4377065467313 70
──────────────────────────────────
```

+

$+$ 0, 9999999999999997441064718684
$+$ 2571422892855

$+$ 1, 0000000000000000012487611539
$-$ 12538995403

$+$ 0, 9999999999999999999948616136
$+$ 51564550

$+$ 1, 0000000000000000000000180686
$-$ 181239

$+$ 0, 9999999999999999999999999447
549

$+$ 0, 9999999999999999999999999996

vnde intelligitur errorem tantum 5 vnitatum in vltimis figuris eſſe commiſſum, qui ob totuplices additiones et ſubtractionés euitari omnino non potuit.

§. 22. Exemplum hoc adieci, vt appareat in computo harum formularum errorem a me non eſſe commiſſum, easque ideo tuto adhiberi poſſe. Quod idem vt clarius perſpiciatur, calculum etiam coſinus anguli 90° hic apponam, qui debet eſſe $= 0$.

$+$ 1, 0000000000000000000000000000
$-$ 1, 2337005501361698273543113745

$-$ 0, 2337005501361698273543113745
$+$ 2536695079010480136365633659

$+$ 199689577648781862822519914
$-$ 208634807633529608730516364

−	8945229984747745907996450
+	9192602748394265802417158
+	247372763646519894420708
−	252020423730606054810526
−	46476600840861003898 18
+	47108747778818171503665
+	6321469473201111 3847
−	6386603083791852 2408
−	6513361059074085 61
+	6565963114979472 30
+	526020559053 8669
−	529440020073 4620
−	34194010195951
+	34377391790981
+	182781595030
−	183599165212
−	817570182
+	820675327
+	3105145
−	3115285
−	10140
+	10165
+	25
−	26
−	1

Qui conſenſus cum veritate tantus eſt, vt de veritate datarum formularum dubitare amplius non liceat.

§. 23. Quaeramus ſpeciminis loco ſinum et coſinum anguli *g* graduum, qui caſus eſt facilis ob valorem $\frac{m}{n} = \frac{1}{10}$. Ac primo quidem pro ſinu erunt termini affirmatiui

0, 1570796326794896619231321691
79692626246167045020 50
16044118478735 98
56921729

\+ 0, 1570804296059125647840629069

Termini vero negatiui ſunt.

0, 0006459640975062462536557565
4681754135318688100
35988432352 1
6688

\- 0, 0006459645656816957739575874
\+ 0, 1570804296059125647840629069

0, 1564344650402308690101053195 = ſin. 9°

Pro coſinu autem ſunt termini affirmatiui

1, 0000000000000000000000000000
2536695079010480136 36563
91926027483942658
4710874778
65

\+ 1,0000253669599827080208454065

Termini vero negatiui

0,

$$
\begin{array}{r}
0,0123370055013616982735431137 \\
208634807633529608730 \\
25202042373060 \\
638660 \\
\hline
-\ 0,0123370263648449818308051587 \\
+\ 1,0000253669599827080208454065 \\
\hline
0,9876883405951377261900402478 = \text{coſ. } 9^\circ
\end{array}
$$

Hoc autem exemplum, etſi in ſuo genere eſt facillimum, tamen abunde declarat vtilitatem formularum datarum, atque compendium, quod illae calculo alias operoſiſſimo afferunt.

§. 24. Labor autem iſtius computi multo fiet minor, ſi ſinus et coſinus non ad tot figuras in fractionibus decimalibus deſiderentur. Ponamus igitur ſinum totum ſeu radium eſſe

$$10000000000$$

atque pro hoc radio erit

$$
\begin{array}{rl}
\text{ſin. A. } \frac{m}{n}\, 90^\circ = & + \frac{m}{n} \cdot 15707963267,94 \\
& - \frac{m^3}{n^3}\ \ 6459640975,06 \\
& + \frac{m^5}{n^5} \cdots 796926162,46 \\
& - \frac{m^7}{n^7} \cdots 46817541,35 \\
& + \frac{m^9}{n^9} \cdots 1604411,84 \\
& - \frac{m^{11}}{n^{11}} \cdots 35988,43 \\
& + \frac{m^{13}}{n^{13}} \cdots 569,21 \\
& - \frac{m^{15}}{n^{15}} \cdots 6,68 \\
& + \frac{m^{17}}{n^{17}} \cdots ,06
\end{array}
$$

Atque pari modo erit

coſ.

$$\text{coſ. A.}\ \tfrac{m}{n}\ 90^\circ = +\ 1000000000,00$$
$$-\tfrac{m^2}{n^2}\ 1233700550 1,36$$
$$+\tfrac{m^4}{n^4}\ .2536695079,01$$
$$-\tfrac{m^6}{n^6}\ ..208634807,63$$
$$+\tfrac{m^8}{n^8}\ ...9192602,74$$
$$-\tfrac{m^{10}}{n^{10}}\ ...252020,42$$
$$+\tfrac{m^{12}}{n^{12}}\ .....4710,87$$
$$-\tfrac{m^{14}}{n^{14}}\ ....63,86$$
$$+\tfrac{m^{16}}{n^{16}}\ ....,65$$

vbi partes centeſimas adiecimus, vt de vltimis figuris penitus certi eſſe queamus.

Problema 4.

§. 25. Inuenire canonem generalem pro inueniendis tangentibus et cotangentibus omnium angulorum.

Solutio.

Quod primum ad tangentes attinet, ponatur angulus rectus ſeu $90^\circ = q$, propoſitusque ſit angulus $\frac{m}{n}q$ graduum ſeu $\frac{m}{n}\ 90^\circ$, erit poſito ſinu toto $= 1$, tang. A . $\frac{m}{n}\ 90^\circ$ $= \frac{2m}{nq}\left(\frac{n^2}{n^2-m^2} + \frac{n^2}{9n^2-m^2} + \frac{n^2}{25n^2-m^2} + \text{etc.}\right)$

$$\text{tang. A}\ .\ \tfrac{m}{n}\ 90^\circ = \tfrac{2m}{nq}\left(1 + \tfrac{1}{3^2} + \tfrac{1}{5^2} + \tfrac{1}{7^2} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \tfrac{2m^3}{n^3q}\left(1 + \tfrac{1}{3^4} + \tfrac{1}{5^4} + \tfrac{1}{7^4} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \tfrac{2m^5}{n^5q}\left(1 + \tfrac{1}{3^6} + \tfrac{1}{5^6} + \tfrac{1}{7^6} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \tfrac{2m^7}{n^7q}\left(1 + \tfrac{1}{3^8} + \tfrac{1}{5^8} + \tfrac{1}{7^8} + \text{etc.}\right)$$
etc.

Quodſi

Quodſi autem termini primi harum ſerierum ſeorſim capiantur, vt reliqui eo magis conuergant erit

$$\text{tang. A}.\tfrac{m}{n}90^\circ = +\frac{2mn}{(nn-mm)q}$$
$$+\frac{2m}{nq}\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\text{etc.}\right.$$
$$+\frac{2m^3}{3n^3}\left(\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\text{etc.}\right.$$
$$+\frac{2m^5}{n^5q}\left(\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{7^6}+\text{etc.}\right.$$
$$+\frac{2m^7}{n^7q}\left(\frac{1}{3^8}+\frac{1}{5^8}+\frac{1}{7^8}+\text{etc.}\right.$$
$$\text{etc.}$$

Eſt vero $\frac{1}{\pi} = \frac{1}{2}q = 0,3183098861 8379$
hincque $\frac{2}{q} = 1,273239544735 16$. Quare ſi ſummae iſtarum ſerierum quae proxime habentur, per hunc valorem multiplicentur prodibit

$$\text{tang. A}.\tfrac{m}{n}90^\circ = +\frac{m}{n-m}.0,6366197723675$$
$$+\frac{m}{n+m}.0,6366197723675$$
$$+\frac{m}{n}.0,2975567820597$$
$$+\frac{m^3}{n^3}.0,0186886502773$$
$$+\frac{m^5}{n^5}.0,0018424752034$$
$$+\frac{m^7}{n^7}.0,0001975800714$$
$$+\frac{m^9}{n^9}.0,0000216977245$$
$$+\frac{m^{11}}{n^{11}}.0,0000024011370$$
$$+\frac{m^{13}}{n^{13}}.0,0000002664132$$
$$+\frac{m^{15}}{n^{15}}.0,0000000295864$$
$$+\frac{m^{17}}{n^{17}}.0,0000000032867$$
$$+\frac{m^{19}}{n^{19}}.0,0000000003651$$
$$+\frac{m^{21}}{n^{21}}.0,0000000000405$$
$$+\frac{m^{23}}{n^{23}}.0,0000000000045$$
$$+\frac{m^{25}}{n^{26}}.0,0000000000000$$

 cuius

cuius formulae ope tangentes in fractionibus decimalibus ad 12. figuras facile computari poterunt poſito ſinu toto $= 1$.

Quod ſecundo ad cotangentes attinet, erit iisdem poſitis

$$\text{cotang. A} \,.\, \tfrac{m}{n}\, 90^\circ = \frac{n}{mq} - \frac{m}{2nq}\left(\frac{4n^2}{4n^2-m^2} + \frac{4n^2}{16n^2-m^2} + \frac{4n^2}{36n^2-m^2} + \frac{4n^2}{64n^2-m^2} + \text{etc.}\right)$$

ſeu

$$\begin{aligned}\text{cot. A} \,.\, \tfrac{m}{n}\, 90^\circ = \frac{n}{mq} &- \frac{m}{2nq}\left(1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{16} + \text{etc.}\right)\\ &- \frac{m^3}{8n^3q}\left(1 + \tfrac{1}{4^2} + \tfrac{1}{9^2} + \tfrac{1}{16^2} + \text{etc.}\right)\\ &- \frac{m^5}{32n^5q}\left(1 + \tfrac{1}{4^3} + \tfrac{1}{9^3} + \tfrac{1}{16^3} + \text{etc.}\right)\\ &- \frac{m^7}{128n^7q}\left(1 + \tfrac{1}{4^4} + \tfrac{1}{9^4} + \tfrac{1}{16^4} + \text{etc.}\right)\\ &\qquad \text{etc.}\end{aligned}$$

Additis autem terminis primis erit

$$\begin{aligned}\text{cot. A} \,.\, \tfrac{m}{n}\, 90^\circ = \frac{n}{mq} &- \frac{m}{2n-m} \cdot \frac{1}{2q} - \frac{m}{2n+m} \cdot \frac{1}{2q}\\ &- \frac{2m}{nq} \cdot \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{25} + \text{etc.}\right)\\ &- \frac{2m^3}{n^3q} \cdot \tfrac{1}{4^2}\left(\tfrac{1}{4^2} + \tfrac{1}{9^2} + \tfrac{1}{16^2} + \tfrac{1}{25^2} + \text{etc.}\right)\\ &- \frac{2m^5}{n^5q} \cdot \tfrac{1}{4^3}\left(\tfrac{1}{4^3} + \tfrac{1}{9^3} + \tfrac{1}{16^3} + \tfrac{1}{25^3} + \text{etc.}\right)\\ &\qquad \text{etc.}\end{aligned}$$

At tam ſerierum loco ſummis ſubſtituendis, quam loco q valore debito, obtinebitur

$$\begin{aligned}\text{cot. A} \,.\, \tfrac{m}{n} q = &+ \frac{n}{m} \,.\, 0,636619772367\overline{5}\\ &- \frac{m}{2n-m} \,.\, 0,318309886183\overline{7}\\ &- \frac{m}{2n+m} \,.\, 0,318309886183\overline{7}\\ &- \frac{m}{n} \,.\, 0,205288889414\overline{5}\\ &- \frac{m^3}{n^3} \,.\, 0,006551074788\overline{2}\\ &- \frac{m^5}{n^5} \,.\, 0,000345029255\overline{4}\\ &- \frac{m^7}{n^7} \,.\, 0,000020279106\overline{0}\\ &- \frac{m^9}{n^9} \,.\, 0,000001236652\overline{7}\end{aligned}$$

—

$$- \frac{m^{11}}{n^{11}} . 0,000000764959$$
$$- \frac{m^{13}}{n^{13}} . 0,0000000047597$$
$$- \frac{m^{15}}{n^{15}} . 0,00000000002969$$
$$- \frac{m^{17}}{n^{17}} . 0,000000000000186$$
$$- \frac{m^{19}}{n^{19}} . 0,0000000000000011$$

Huiusque formulae ope cotangentes angulorum omnium 90. gradibus minorum expedite reperiri poterunt.

Q. E. I.

§. 26. Quanquam ex datis anguli ſinu et coſinu eiusdem tangens et cotangens inueniri poſſint, tamen diuiſio, quae adhiberi debet, plerumque nimis moleſta eſſe ſolet. Quamobrem formulas hic datas multo aptiores eſſe merito arbitramur ad tangentes et cotangentes quorumuis angulorum inueniendas. Vt autem veritas harum regularum perſpiciatur, eiusmodi exempla tangentium et cotangentium euoluamus, quae per ſe ſint cognita. Quaeratur itaque tangens anguli ſemirecti ſeu 45°, quam conſtat eſſe aequalem ſinui toti ſeu 1. Erit igitur $m = 1$ et $n = 2$; vnde termini prodibunt ſequentes addendi:

0,636619772367 5
0,212206590789 1
148778391029 8
2336081284 7
57577350 1
15435943
423784
11724
325
9
1,000000000000

vti

vbi in additione vltimae columnae tres vnitates ſunt adiectae, quippe quae prodituraе fuiſſe cenſendae ſunt ex ſequentibus columnis, ſi affuiſſent. Ceterum ex formula manifeſtum eſt tangentem anguli recti fore infinitam ob $n-m=0$. Pro cotangente ſumamus exemplum anguli recti, cuius cotangens eſt $=0$. Cum igitur expreſſio noſtra cotangentis omnes terminos praeter primum habeat negatiuos addamus terminos negatiuos ſeorſim, qui ob $m=n=1$ ita ſe habebunt.

$$
\begin{array}{r}
0,318309886183\,7 \\
0,106103295394\,6 \\
0,205288889414\,5 \\
655107478\,82 \\
3450292\,554 \\
202791\,060 \\
12366\,527 \\
764\,959 \\
47\,597 \\
2\,969 \\
186 \\
11 \\
\hline
0,636619772367\,5
\end{array}
$$

Terminus autem affirmatiuus, a quo haec ſumma auferri debet eſt

$$0,6366197723675$$

ita vt cotangens anguli recti actu reperiatur $=0$.

§. 27. Etſi autem haec, quae de inuentione ſinuum et tangentium attulimus ex ſeriebus meis nuper expoſitis conſequuntur, tamen eaedem hae formulae ex aliis iam dudum cognitis ſeriebus deduci potuiſſent. His igitur relictis

lictis grogredior ad ea, quae huic methodo ſummandi ſeries ſint propria, atque modum docebo facilem inueniendi logarithmos ſinuum, et tangentium quorumcunque angulorum; qui eo magis eſt notatu dignus, quod logarithmos ſiue ſinuum ſiue tangentium praebeat, ſine praeuia ipſorum ſinuum ac tangentium cognitione. Cum autem logarithmi ſint duplices, vel naturales ſeu hyperbolici, vel decadici, in quibus logarithmus 10 ponitur $= 1$, vtriusque generis logarithmos hic inuenire docebo.

Problema. 5.

§. 28. Definire logarithmum tam naturalem quam conſuetum ſiue ſinus ſiue coſinus anguli cuiuscunque propoſiti.

Solutio.

Ex paragr. 19. capiatur pro logarithmo ſinus inueniendo expreſſio haec

$$\text{ſin. A.}\, \frac{m}{n} q = \frac{m}{n} q \,.\, \frac{4n^2 - m^2}{4n^2} \,.\, \frac{16n^2 - m^2}{16n^2} \,.\, \frac{36n^2 - m^2}{36n^2} \,.\, \text{etc.}$$

quae in logarithmos conuerſa ſtatim dat

$$l\,\text{ſin. A.}\, \frac{m}{n} q = l\, \frac{m}{n} + \left(1 - \frac{m^2}{4n^2}\right) + l\left(1 - \frac{m^2}{16n^2}\right) + \text{etc.}$$

Quaeratur primo logarithmus naturalis ſinus anguli $\frac{m}{n} q$ ſeu $\frac{m}{n}\, 90^\circ$, eritque logarithmis per ſeries expreſſis

$$\begin{aligned} l\,\text{ſin. A.}\, \frac{m}{n} q = {} & l\, q + l\, \frac{m}{n} \\ & - \frac{m^2}{4n^2}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \text{etc.}\right) \\ & - \frac{m^4}{2\cdot4^2n^4}\left(1 + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{16^2} + \text{etc.}\right) \\ & - \frac{m^6}{3\cdot4^3n^6}\left(1 + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{16^3} + \text{etc.}\right) \\ & - \frac{m^8}{4\cdot4^4n^8}\left(1 + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{9^4} + \frac{1}{16^4} + \text{etc.}\right) \\ & \text{etc.} \end{aligned}$$

ſiue l ſin. A $\frac{m}{n} q = l q - l \frac{n}{m} - l \frac{4n^2}{4n^2 - m^2}$

$$- \frac{m^2}{1.4n^2} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \text{etc.} \right)$$
$$- \frac{m^4}{2.4^2 n^4} \left(\frac{1}{4^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{16^2} + \frac{1}{25^2} + \text{etc.} \right)$$
$$- \frac{m^6}{3.4^3 n^6} \left(\frac{1}{4^3} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{16^3} + \frac{1}{25^3} + \text{etc.} \right)$$
$$- \frac{m^8}{4.4^4 n^8} \left(\frac{1}{4^4} + \frac{1}{9^4} + \frac{1}{16^4} + \frac{1}{25^4} + \text{etc.} \right)$$
etc.

Quodſi nunc loco harum ſerierum ſummae proximae ſubſtituantur, eaeque per coefficientes numericas multiplicentur prodibit l ſin. A $\frac{m}{n}$ 90° =

$$lq - 2l2 - 3ln + lm + l(2n-m) + l(2n+m)$$
$$- \frac{m^2}{n^2} \cdot 0,16123351671205660911810379$$
$$- \frac{m^4}{n^4} \cdot 0,00257260105347306848487511$$
$$- \frac{m^6}{n^6} \cdot 0,00009032844783567260267978$$
$$- \frac{m^8}{n^8} \cdot 0,00000398179316205501892449$$
$$- \frac{m^{10}}{n^{10}} \cdot 0,00000019425295465196979631$$
$$- \frac{m^{12}}{n^{12}} \cdot 0,00000001001328748812045486$$
$$- \frac{m^{14}}{n^{14}} \cdot 0,00000000053404135618987888$$
$$- \frac{m^{16}}{n^{16}} \cdot 0,00000000002914859658937808$$
$$- \frac{m^{18}}{n^{18}} \cdot 0,00000000000161797979778706$$
$$- \frac{m^{20}}{n^{20}} \cdot 0,00000000000009097690905311$$
$$- \frac{m^{22}}{n^{22}} \cdot 0,0000000000000051682754587$$
$$- \frac{m^{24}}{n^{24}} \cdot 0,0000000000000002960770778$$
$$- \frac{m^{26}}{n^{26}} \cdot 0,0000000000000000170813$$
$$- \frac{m^{28}}{n^{28}} \cdot 0,0000000000000000009913$$
$$- \frac{m^{30}}{n^{30}} \cdot 0,0000000000000000000578$$
$$- \frac{m^{32}}{n^{32}} \cdot 0,0000000000000000000034$$

qui

qui termini poſttemi etſi non eousque ſint continuati ac priores, tamen poteſtate vlterius porriguntur niſi ſit $\frac{m}{n}=1$. Dat autem haec forma logarithmum hyperbolicum ſinus anguli $\frac{m}{n}\,90^\circ$, poſito ſinu toto $=1$ eiusque logarithmo $=0$. Debent autem pro hoc negotio etiam numerorum $2, n, m$, $2n-m$ et $2n+m$ logarithmi hyperbolici accipi, itemque ipſius q, quem ſupra indicauimus. Hac vero ipſa methodo poterit lq accuratius exhiberi. Quodſi enim ponatur $m=1$ et $n=2$ erit $l\,\text{ſin. A}.\,45' = l\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}l2$: ſerierum vero ſummae additae conficient vt ſequitur.

0,040308379178014152279525 95
160787565842066780304 69
14111381997432384416 87
155538795392777417 67
18970015102731425
24446502656 5441
32595297619 01
44477228683
617210311
8676234
123221
1765
25
0,0404705938719110383446 5527

qui valor ponatur tantiſper $=\alpha$ eritque $lq=\alpha+5\,l2-\frac{1}{2}l2-l3-l5$ eſt vero

 $\frac{1}{2}l2$

$$\begin{aligned}
\tfrac{9}{2} l2 &= 3,1191623125197538923775 4454 \\
l3 &= 1,0986122886681096913952 4526 \\
l5 &= 1,6094379124341003746007 5935 \\
\tfrac{9}{2} l2 - l15 &= 0,4111121111417543826381 53993 \\
a &= 0,0404705938719110383446 5527 \\
\hline
lq &= 0,4515827052894548647261 9520 \\
l2 &= 0,6931471805599453094172 3212 \\
\hline
l2q &= 1,1447298858494001741434 2732
\end{aligned}$$

qui eſt valor pro logarithmo hyperbolico ipſius π, quem ſupra minus accurate §. 18. definiuimus. Quare ſi iſte valor loco lq ſubſtituatur, facili negotio logarithmi hyperbolici ſinuum quorumuis angulorum reperiri poterunt, vbi hoc tantum eſt monendum, numerorum 2, m, n, $2n - m$ et $2n + m$ logarithmos quoque hyperbolicos ſumi debere; qui vel facile computantur vel paſſim computati reperiuntur. Ex logarithmis autem hyperbolicis inueniuntur logarithmi communes, ſi illi multipliceutur per

$$0,434294481932518 2$$

Fiat igitur haec multlplicatio, et tum addatur 10, eo quod in tabulis ordinariis logarithmus ſinus totius poni ſolet $= 10$, quo facto erit

$$\begin{aligned}
\text{log. ſin. A.} \tfrac{m}{n} 90^\circ = l(2n+m) + l(1n-m) &+ lm - 3ln \\
&+ 9,5940598857021 8017 \\
&- \tfrac{m^2}{n^2} \cdot 0,0700228266059019 1 \\
&- \tfrac{m^4}{n^4} \cdot 0,0011172664416618 4 \\
&- \tfrac{m^6}{n^6} \cdot 0,0000392291464539 1 \\
&- \tfrac{m^8}{n^8} \cdot 0,0000017292707983 6 \\
&- \tfrac{m^{10}}{n^{10}} \cdot 0,0000000843629862 9 \\
&- \tfrac{m^{12}}{n^{12}} \cdot 0,0000000043487155 0
\end{aligned}$$

$$-\frac{m^{14}}{n^{14}}\cdot 0,000000000023193121$$
$$-\frac{m^{16}}{n^{16}}\cdot 0,0000000000001265907$$
$$-\frac{m^{18}}{n^{18}}\cdot 0,00000000000070268$$
$$-\frac{m^{20}}{n^{20}}\cdot 0,00000000000003951$$
$$-\frac{m^{22}}{n^{22}}\cdot 0,00000000000000224$$
$$-\frac{m^{24}}{n^{24}}\cdot 0,00000000000000013$$

Huius igitur expreſſionis ope logarithmi ſinuum ad duodecim atque etiam plures figuras computari poterunt: ſi quidem $\frac{m}{n}$ ſit $< \frac{1}{2}$ quibus caſibus termini duplo pauciores ſufficiunt.

Pergamus ergo ad logarithmos coſinuum definiendos, id quod commodiſſime fiet ex aequatione coſ. A. $\frac{m}{n} q = \frac{n^2-m^2}{n^2} \cdot \frac{9n^2-m^2}{9n^2} \cdot \frac{25n^2-m^2}{25n^2}$. etc.

ex qua fit

$$l\,\text{coſ. A.}\,\frac{m}{n}\,90^\circ = l\,\frac{n^2-m^2}{n^2}$$
$$-\frac{m^2}{n^2}\cdot\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\text{etc.}\right)$$
$$-\frac{m^4}{2n^4}\cdot\left(\frac{1}{9^2}+\frac{1}{25^2}+\frac{1}{49^2}+\text{etc.}\right)$$
$$-\frac{m^6}{3n^6}\cdot\left(\frac{1}{9^3}+\frac{1}{25^3}+\frac{1}{49^3}+\text{etc.}\right)$$
$$-\frac{m^8}{4n^8}\cdot\left(\frac{1}{9^4}+\frac{1}{25^4}+\frac{1}{49^4}+\text{etc.}\right)$$

etc.

ſeu ſummis proxime ſumendis erit

$$l\,\text{coſ. A.}\,\frac{m}{n}\,90^\circ = l(n-m)+l(n+m)-2\,l n$$
$$-\frac{m^2}{n^2}\cdot 0,23370055013616982735$$
$$-\frac{m^4}{n^4}\cdot 0,00733901580209602727$$
$$-\frac{m^6}{n^6}\cdot 0,00048235888031404063$$
$$-\frac{m^8}{n^8}\cdot 0,00003879475632402982$$
$$-\frac{m^{10}}{n^{10}}\cdot 0,00000340827260896510$$

$$
\begin{aligned}
&-\tfrac{m^{12}}{n^{12}}\,.\,0,00000031430809718659\\
&-\tfrac{m^{14}}{n^{14}}\,.\,0,00000002989150274450\\
&-\tfrac{m^{16}}{n^{16}}\,.\,0,00000000290464467239\\
&-\tfrac{m^{18}}{n^{18}}\,.\,0,00000000028682639518\\
&-\tfrac{m^{20}}{n^{20}}\,.\,0,00000000002868076974\\
&-\tfrac{m^{22}}{n^{22}}\,.\,0,00000000000289697956\\
&-\tfrac{m^{24}}{n^{24}}\,.\,0,00000000000029506024\\
&-\tfrac{m^{26}}{n^{26}}\,.\,0,00000000000003026249\\
&-\tfrac{m^{28}}{n^{28}}\,.\,0,00000000000000312232\\
&-\tfrac{m^{30}}{n^{30}}\,.\,0,00000000000000032379\\
&-\tfrac{m^{32}}{n^{32}}\,.\,0,00000000000000003373\\
&-\tfrac{m^{34}}{n^{34}}\,.\,0,00000000000000000352\\
&-\tfrac{m^{36}}{n^{36}}\,.\,0,00000000000000000037\\
&-\tfrac{m^{38}}{n^{38}}\,.\,0,00000000000000000004
\end{aligned}
$$

Hoc modo igitur reperitur logarithmus hyperbolicus coſinus cuiusque anguli, exiſtente logarithmo ſinus totius $= 0$. At logarithmus ordinarius obtinebitur, ſi iſte logarithmus multiplicetur per

$$0,43429448190325182$$

atque ad eum addatur 10. logarithmus ſcilicet ſinus totius in tabulis receptus: erit igitur

$$
\begin{aligned}
\text{log. coſ. A}\,.\,\tfrac{m}{n}\,90^\circ = {}&10,000000000000000\\
&-2\,ln+l(n-m)+l(n+m)\\
&-\tfrac{m^2}{n^2}\,.\,0,101494859341892\\
&-\tfrac{m^4}{n^4}\,.\,0,003187294065451\\
&-\tfrac{m^6}{n^6}\,.\,0,000209485800017\\
&-\tfrac{m^8}{n^8}\,.\,0,000016848348597
\end{aligned}
$$

—

$$- \frac{m^{10}}{n^{10}} \cdot 0,00000148019396$$
$$- \frac{m^{12}}{n^{12}} \cdot 0,000000136502272$$
$$- \frac{m^{14}}{n^{14}} \cdot 0,00000001298 1715$$
$$- \frac{m^{16}}{n^{16}} \cdot 0,0000000001261471$$
$$- \frac{m^{18}}{n^{18}} \cdot 0,00000000000124567$$
$$- \frac{m^{20}}{n^{20}} \cdot 0,000000000000012456$$
$$- \frac{m^{22}}{n^{22}} \cdot 0,0000000000001258$$
$$- \frac{m^{24}}{n^{24}} \cdot 0,000000000000128$$
$$- \frac{m^{26}}{n^{26}} \cdot 0,000000000000013$$
$$- \frac{m^{28}}{n^{28}} \cdot 0,000000000000001$$

Hinc igitur inuenientur logarithmi vulgares coſinuum quorumcunque angulorum, idque ad 14 figuras in fractionibus decimalibus.

Q E I.

§. 29. Ex datis logarithmis ſinuum et coſinuum inveniuntur primo ſtatim logarithmi ſecantium et coſecantium. Deinde cum tangentis logarithmus prodeat, ſi ab aggregato logarithmorum ſinus totius et ſinus anguli dati ſubtrahatur logarithmus coſinus, erit pro logarithmis hyperbolicis poſito logarithmo ſinus totius $=$ o;

$$l \,\text{tang. A} \,. \frac{m}{n} 90^\circ = l \frac{2n+m}{n+m} + l \frac{2n-m}{n-m} - l \frac{n}{m}$$
$$- 0,93471165583 0435$$
$$+ \frac{m^2}{n^2} \cdot 0,07246703342 4103$$
$$+ \frac{m^4}{n^4} \cdot 0,00476641474 8623$$
$$+ \frac{m^6}{n^6} \cdot 0,00039203043 2478$$
$$+ \frac{m^8}{n^8} \cdot 0,00003481296 3162$$

+

$$+ \frac{m^{10}}{n^{10}} . \; 0,000003214019654$$
$$+ \frac{m^{12}}{n^{12}} . \; 0,000000304294809$$
$$+ \frac{m^{14}}{n^{14}} . \; 0,000000029357461$$
$$+ \frac{m^{16}}{n^{16}} . \; 0,000000002875496$$
$$+ \frac{m^{18}}{n^{18}} . \; 0,000000000285208$$
$$+ \frac{m^{20}}{n^{20}} . \; 0,000000000028589$$
$$+ \frac{m^{22}}{n^{22}} . \; 0,000000000002891$$
$$+ \frac{m^{24}}{n^{24}} . \; 0,000000000000294$$
$$+ \frac{m^{26}}{n^{26}} . \; 0,000000000000030$$
$$+ \frac{m^{28}}{n^{28}} . \; 0,000000000000003$$

Huius expreſſionis autem negatiuum dabit cotangentis anguli $\frac{m}{n}\, 90^{\circ}$ logarithmum hyperbolicum. Haecque expreſſio magnam afferet vtilitatem in Hydrographia, in quam ab Halleio logarithmi tangentium ſunt introducti.

§. 30 Simili modo logarithmi vulgares tangentium hinc inuenientur, erit ſcilicet

$$\log.\ \text{tang. A.}\ \frac{m}{n}\, 90^{\circ} = l\, \frac{2n+m}{n+m} + l\, \frac{2n-m}{n-m} - l\, \frac{n}{m}$$
$$+ \; 9,594059885702190$$
$$+ \frac{m^{2}}{n^{2}} . \; 0,031472032735990$$
$$+ \frac{m^{4}}{n^{4}} . \; 0,002070027623789$$
$$+ \frac{m^{6}}{n^{6}} . \; 0,000170256653563$$
$$+ \frac{m^{8}}{n^{8}} . \; 0,000015119077799$$
$$+ \frac{m^{10}}{n^{10}} . \; 0,000001395831000$$
$$+ \frac{m^{12}}{n^{22}} . \; 0,000000132153556$$
$$+ \frac{m^{14}}{n^{14}} . \; 0,000000012749783$$
$$+ \frac{m^{16}}{n^{16}} . \; 0,000000001248812$$

+

$+ \frac{m^{18}}{n^{18}} . 0,000000000123864$
$+ \frac{m^{20}}{n^{20}} . 0,000000000012416$
$+ \frac{m^{22}}{n^{22}} . 0,000000000001256$
$+ \frac{m^{24}}{n^{24}} . 0,000000000000128$
$+ \frac{m^{26}}{n^{26}} . 0,000000000000013$
$+ \frac{m^{28}}{n^{28}} . 0,000000000000001$

Quodſi hinc quaeratur logarithmus tangentis anguli 45. graduum erit $n = 2$ et $m = 1$, fietque ſumma ſeriei

0,0078680081839977
1293767264868
26602602119
590588976
13631162
322640
7782
191
4
0,0080001056257721

logarithmi vero numerorum naturalium ſunt

$l\,5 =$	0,6989700043360188
$-l\,2 =$	0,3010299956639811
	0,3979400086720377
addatur	9,5940598857021902

$$\begin{array}{r} 9,9919998943742279 \\ \text{itemque},\ 0,0080001056257721 \\ \hline 10,0000000000000000 \end{array}$$

qui eſt logarithmus tangentis anguli 45. grad.

§. 32. Quodſi quis igitur voluerit tabulas ſinuum et tangentium eorumque logarithmorum computare ad duodecim figuras in fractionibus decimalibus, dum tabulae vſu receptae eas tantum ad ſeptem figuras exhibent; is ſequentibus regulis vti poterit. Propoſitus ſcilicet ſit angulus $\frac{m}{n}$ 90. graduum erit.

$$\begin{array}{rl} \text{ſin. A}\,.\,\frac{m}{n}\,90^\circ = +\frac{m}{n} & .\ 1,5707963267949 \\ -\frac{m^3}{n^3} & .\ 0,6459640975062 \\ +\frac{m^5}{n^5} & .\ 0,0796926262461 \\ -\frac{m^7}{n^7} & .\ 0,0046817541353 \\ +\frac{m^9}{n^9} & .\ 0,0001604411848 \\ -\frac{m^{11}}{n^{11}} & .\ 0,0000035988432 \\ +\frac{m^{13}}{n^{13}} & .\ 0,0000000569217 \\ -\frac{m^{15}}{n^{15}} & .\ 0,0000000006688 \\ +\frac{m^{17}}{n^{17}} & .\ 0,0000000000061 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \text{coſ. A}\,.\,\frac{m}{n}\,90^\circ = + & 1,0000000000000 \\ -\frac{m^2}{n^2} & .\ 1,2337005501361 \\ +\frac{m^4}{n^4} & .\ 0,2536695079010 \\ -\frac{m^6}{n^6} & .\ 0,0208634807633 \\ +\frac{m^8}{n^8} & .\ 0,0009192602748 \\ -\frac{m^{10}}{n^{10}} & .\ 0,0000252020424 \end{array}$$

+

$$+ \frac{m^{12}}{n^{12}} . 0,0000004710875$$
$$- \frac{m^{14}}{n^{14}} . 0,0000000063866$$
$$+ \frac{m^{16}}{n^{16}} . 0,0000000000656$$
$$- \frac{m^{18}}{n^{18}} . 0,0000000000005$$

$$\text{tang. A.} \frac{m}{n} 90^\circ = \frac{m}{n-m} . 0,6366197723675$$
$$+ \frac{m}{n+m} . 0,6366197723675$$
$$+ \frac{m}{n} . 0,2975567820597$$
$$+ \frac{m^3}{n^3} . 0,0186886502773$$
$$+ \frac{m^5}{n^5} . 0,0018424752034$$
$$+ \frac{m^7}{n^7} . 0,0001975800714$$
$$+ \frac{m^9}{n^9} . 0,0000216977245$$
$$+ \frac{m^{11}}{n^{11}} . 0,0000024011370$$
$$+ \frac{m^{13}}{n^{13}} . 0,0000002664132$$
$$+ \frac{m^{15}}{n^{15}} . 0,0000000295864$$
$$+ \frac{m^{17}}{n^{17}} . 0,0000000032867$$
$$+ \frac{m^{19}}{n^{19}} . 0,0000000003651$$
$$+ \frac{m^{21}}{n^{21}} . 0,0000000000405$$
$$+ \frac{m^{23}}{n^{23}} . 0,0000000000045$$
$$+ \frac{m^{25}}{n^{25}} . 0,0000000000005$$

$$\text{cot. A.} \frac{m}{n} 90^\circ = \frac{n}{m} . 0,6366197723075$$
$$- \frac{m}{2m-n} . 0,3183098861837$$
$$- \frac{m}{2n+m} . 0,3183098861837$$
$$- \frac{m}{n} . 0,2052888894145$$
$$- \frac{m^3}{n^3} . 0,0065510747882$$

$$- \frac{m^5}{n^5} . 0,0003450292554$$
$$- \frac{m^7}{n^7} . 0,0000202791060$$
$$- \frac{m^9}{n^9} . 0,0000012366527$$
$$- \frac{m^{11}}{n^{11}} . 0,0000000764959$$
$$- \frac{m^{13}}{n^{13}} . 0,0000000047597$$
$$- \frac{m^{15}}{n^{15}} . 0,0000000002969$$
$$- \frac{m^{17}}{n^{17}} . 0,0000000000185$$
$$- \frac{m^{19}}{n^{19}} . 0,0000000000011$$

$$\text{log. ſin. A.} \frac{m}{n} 90^\circ = l(2n+m) + l(2n-m) + lm - 3ln$$
$$+ 9,5940598857021$$
$$- \frac{m^2}{n^2} . 0,0700228266059$$
$$- \frac{m^4}{n^4} . 0,0011172664416$$
$$- \frac{m^6}{n^6} . 0,0000392291464$$
$$- \frac{m^8}{n^8} . 0,0000017292708$$
$$- \frac{m^{10}}{n^{10}} . 0,0000000843629$$
$$- \frac{m^{12}}{n^{12}} . 0,0000000043487$$
$$- \frac{m^{14}}{n^{14}} . 0,0000000002319$$
$$- \frac{m^{16}}{n^{16}} . 0,0000000000126$$
$$- \frac{m^{18}}{n^{18}} . 0,0000000000007$$

$$\text{log. coſ. A.} \frac{m}{n} 90^\circ = 10,0000000080000$$
$$+ l(n+m) + l(n-m) - 2ln$$

$-$

$$- \frac{m^2}{n^2} \cdot 0,1014948593419$$
$$- \frac{m^4}{n^4} \cdot 0,0031872940654$$
$$- \frac{m^6}{n^6} \cdot 0,0002094858000$$
$$- \frac{m^8}{n^8} \cdot 0,0000168483486$$
$$- \frac{m^{10}}{n^{10}} \cdot 0,0000014801940$$
$$- \frac{m^{12}}{n^{12}} \cdot 0,0000001365023$$
$$- \frac{m^{14}}{n^{14}} \cdot 0,0000000129817$$
$$- \frac{m^{16}}{n^{16}} \cdot 0,0000000012614$$
$$- \frac{m^{18}}{n^{18}} \cdot 0,0000000001245$$
$$- \frac{m^{20}}{n^{20}} \cdot 0,0000000000126$$
$$- \frac{m^{22}}{n^{22}} \cdot 0,0000000000013$$

$$\text{log. tang. A} \frac{m}{n} 90^\circ = l \frac{2n+m}{n+m} + l \frac{2n-m}{n-m} - l \frac{n}{m}$$
$$+ 9,5940598857022$$
$$+ \frac{m^2}{n^2} \cdot 0,0314720327359$$
$$+ \frac{m^4}{n^4} \cdot 0,0020700276238$$
$$+ \frac{m^6}{n^6} \cdot 0,0001702566535$$
$$+ \frac{m^8}{n^8} \cdot 0,0000151190778$$
$$+ \frac{m^{10}}{n^{10}} \cdot 0,0000013958310$$
$$+ \frac{m^{12}}{n^{12}} \cdot 0,0000001321535$$
$$+ \frac{m^{14}}{n^{14}} \cdot 0,0000000127498$$
$$+ \frac{m^{16}}{n^{16}} \cdot 0,0000000012488$$
$$+ \frac{m^{18}}{n^{18}} \cdot 0,0000000001238$$
$$+ \frac{m^{20}}{n^{20}} \cdot 0,0000000000124$$

$$+ \frac{m^{22}}{n^{22}} \cdot 0,0000000000012$$
$$+ \frac{m^{24}}{n^{24}} \cdot 0,0000000000001$$

Quodſi hic logerithmus a 20. ſubtrahatur, prodibit logarithmus cotangentis eiusdem anguli $\frac{m}{n}$ $90°$. Simili autem modo logarithmus coſinus a 20. ſubtractus relinquet logarithmum ſecantis, atque logarithmus ſinus a 20. ſubtractus logarithmum coſecantis.

CLAS

CLASSIS SECVNDA.

CONTINENS

PHYSICA.

DE
VI VENAE AQVEAE CONTRA PLANVM INCVRRENTIS
EXPERIMENTA,

AVCTORE
Georg. Wolffg. Krafft.

Miſit ad Academiam noſtram ante aliquod tempus Diſſertationem eruditiſſimam Clar. Daniel Bernoulli, cui titulus eſt: *De legibus quibusdam Mechanicis, quas natura conſtanter affectat, nondum deſcriptis, earumque vſu Hydrodynamico pro determinanda vi venae aqueae contra planum incurrentis*; in qua calculo elegantiſſimo, et ex fundamentis ab intima motus natura petitis, profundo ſane ingenio determinat vim, ſeu impetum, quem vena aquea ex vaſe repleto proſiliens, et in planum aliquod oppoſitum incurrens, contra hoc planum exſerit. Cumque theoriam exinde formatam Experimento ibidem expoſito confirmaſſet: iuſſus ab Ill. Academiae Praeſide fui ego, vt idem repeterem, et quae deprehenderem Academiae exponerem. Feci ergo huius Theoriae periculum ſumma qua potui diligentia et exactitudine. Ante vero quam enarrare poſſim, quid per Experimenta mea edoctus fuerim, Tab. IV.

rim, haud abs re fore puto breuiter repetere ea, in quibus ingenioſiſſima Theoria Bernoulliana conſiſtit. Pro determinanda vi venae aqueae in planum incurrentis prima Experimenta facta eſſe dicit in Academia Scientiarum Pariſienſi, anno 1669, teſte Duhammelio in Hiſtoria huius Academiae; poſt haec ſecuta eſſe multa alia; ſtatuiſſe autem omnes Phyſicos ex his Experimentis, praedictam vim venae aqueae, mox ante foramen ab aſſerculo aliquo exceptae, aequalem eſſe ponderi cylindri aquei, cuius baſis ſit foramen per quod aqua exſilit, altitudo autem ea, quae eſt aquae totius ſupra foramen extantis. Ita iuxta
Tab. IV. fig. 1. hanc Hypotheſin eſſet vis, quam aqua per GM exſiliens in planum aſſerculum OP exſerit, aequalis ponderi cylindri aquei, cuius baſis eſt area foraminis GM, et altitudo GA. Aſſerit porro, Hypotheſi huic Experimenta nunquam ex aſſe reſpondiſſe, cuius diſſenſus inter Experimenta et Ratiocinia duplicem affert cauſam. Primo enim putant huius ſententiae Patroni celeritatem aquae per GM exſilientis eam eſſe, quam graue aliquod libere per AG delapſum acquirere poſſet; quo ipſo inducti ſunt, vt cylindrum aqueum altitudinis AG aſſumerent. Sed notum hodie eſt, hoc non verum eſſe niſi foramen GM ſtatuatur infinite paruum; in foramine autem finitae magnitudinis iactum venae aqueae exeuntis iſtum gradum celeritatis nunquam attingere. Secundo ſtatuitur in hac opinione, amplitudinem venae exeuntis eandem eſſe quae eſt foraminis per quod effluit, aut vtriusque eandem eſſe Diametrum; ſed cognitum hodie eſt, venam aqueam per foramen e vaſe erumpentem contrahi ſenſibiliter cum e foramine exiit; quam *venae contractionem* Newtonus primus

mus obſeruauit. Remidium itaque his duobus incommodis allaturus Clar. Bernoulli ſtatuit, celeritatem aquae per GM exſilientis non aſſumendam eſſe eam, quae debetur altitudini aquae ſupra foramen GA, ſed pro quolibet caſu Experimentis inquirendum eſſe in celeritatem realem, quam aqua effluens actu ipſo habet, quod per Mechanicae regulas ſemper fieri poteſt. Deinde amplitudinem venae aſſumendam eſſe non eam, quae aequalis ſit amplitudini venae contractae; aut vero euitandam eſſe hanc contractionem, quod fit, ſi aqua non per ſolum foramen GM, ſed per tubulum YE foramini GM inſertum effluit.

His praemiſſis appellat *cylindrum aqueum correctum* eum, cuius baſis eſt amplitudo venae contractae, niſi ſcil. haec contractio venae, immiſſo foramini tubulo, impediatur; et cuius altitudo eſt ea, quae debetur celeritati reali et actuali quam vena aquea mox poſt effluxum ſuum habet, et quae in quolibet caſu peculiari Experimento determinanda eſt; tandem vero ſtatuit, vim venae aqueae per tubulum YE in planum OP incurrentis aequalem eſſe duplo ponderi huius cylindri aquei correcti.

Vt igitur in hanc Theoriam Experimentis inquirerem, aſſumſi vas ligneum ABCD quadratum, cuius latus AB eſt $\frac{15}{12}$ pedis Londinenſis, et altitudo 2. pedum. Huic vaſi inſerui tubulum YE ex orichalco confectum, interne bene politum, vt aqua eo liberius effluere poſſet. Deinde in parte anteriori vaſis adaptaui vectem STV e ligno quercino confectum, ſub angulo recto inflexum, et circa hypomochlium H liberrime mobilem; huius vectis brachio HS inſerui annulum I, ex quo dependebat lanx K

ponduſculis oneranda, et quae ope annuli I facillime hinc et inde moueri ſupra brachium poterat. In parte inferiori vero huius vectis affixus erat orbiculus OP rotundus et quercinus, tubulo YE directe oppoſitus, in quem vena incurreret; totus vero hic vectis inflexus nullo pondere in I oneratus perfectum aequilibrium ſeruabat. Vaſi ligneo AD inferne adiuncta eſt ciſta etiam lignea NR, in cuius fundo NQ amplitudo NL iactus liberi, quem vena aquea ſibi relicta efficeret, obſeruari potuit. Tandem vero ſemper curaui, vt fundus hic NQ in quouis Experimento eſſet perfecte horizontalis, et vectis inflexus non niſi ſolo orbiculo OP oneratus, eſſet in exactiſſimo aequilibrio, dum nempe ſemper effeci, vt brachium TV eſſet perpendiculo proxime applicato parallelum. His ita praeparatis cepi

EXPERIMENTVM I.

Die 2. Iunii 1736. vbi primum obſeruaui, quam amplitudinem vena aquea libere, remoto nempe vecte, effluens efficeret, et inueni in ſcala Geometrica accurratiſſime confecta diſtantiam ZL = 4542 partium talium, qualium 2000 quamproxime efficiunt pedem Londinenſem, qua menſura in ſequentibus conſtanter vtar; demiſſa nempe a fine tubuli Y perpendiculari YZ in fundum ciſtae adiunctae; ipſa vero haec perpendicularis XZ, cuius initium e medio tubuli ſumſi, erat = 2017 part. Pro amplitudine autem iactus liberi aſſumſi diſtantiam ZL, quoniam vena XL in X incipit parabolam iactus ſui deſcribere. Pondus lancis cum annulo et filamentis ſimul erat 829 Granorum talium, qualium 7680 efficiunt libram Hollandicam, pondus vero K lanci adhuc impoſitum erat

erat 700 Gran. ita vt pondus totum, aequilibrium cum vi venae aqueae erumpentis producens fuerit 1549 Gran. porro inueni H I = 2010 part. T X, cuius initium a recta per mediam brachium S T tranſeunte ſumſi, = 2218 part. Denique vt pondus aquae, qua vas repletum erat, deprehenderem, impleui eadem aqua cylindrum, cuius diameter eſt 675 part. altitudo autem 685, cuius voluminis aquei pondus, detracto pondere vaſis, deprehendi 13111 Gran. Diameter G M erat 89 part. Igitur pro altitudine celeritate effluxus liberi debita notum eſt, quod haec altitudo, ſupponendo ſemitam venae ita erumpentis eſſe parabolicam, ſit $= \frac{ZL^2}{4XZ}$, ex quo ſequitur, altitudinem celeritati actuali, qua aqua per foramen X erumpebat, debitam fuiſſe = 2557 part. Erat autem altitudo ipſa aquae ſupra foramen in vaſe A G = 3738, vnde apparet, quod alias cognitum eſt, quod celeritas actualis aquae erumpentis plane non reſpondeat altitudini aquae ſupra lumen. Quoniam nunc indagari debet pondus cylindri aquei correcti, hoc eſt, cylindri aquei, cuius baſis eſt area G M, ob euitatam per tubulum venae aqueae contractionem, et altitudo = 2557 part. Sit hunc in finem vas, cuius aqua repleti pondus examinaui, $\alpha\beta\gamma\delta$, atque erunt pondera, aquae in hoc vaſe contentae, et aquae cylindro correcto comprehenſae, inter ſe vti volumina horum cylindrorum, ob denſitatem aquae vtrobique eandem, hoc eſt, vti $\beta\gamma^2.\alpha\beta$ ad GM^2 2557. Ex qua analogia inuenitur pondus cylindri aquei correcti = $850\frac{2}{3}$ Gran. et huius duplum = $1701\frac{1}{3}$ Gr. quae eſt ex Theoria vis venae aqueae contra orbiculum O P incurrentis. At vero datum in K pondus tolale, quod P vocabo, ſuſtinet in ſtatu

Tab. IV. fig. 2.

Tab. IV. fig. 1.

ſtatu aequilibrii impetum in X factum aequalem $\frac{HI}{TX} \times P$, vnde ex obſeruatione colligitur hic impetus = 1403 $\frac{2}{3}$ Gr. ex quo ſequitur, Theoriam excedere pondus in Experimento obſeruatum 297 $\frac{2}{3}$ Granis; quodſi autem ſequamur Theoriam reiectam, ea pro pondere praebet 1243 Gr. quare haec deficit a pondere in Experimento obſeruato 160 Granis. Fuit etiam in hoc Experimento prominentia tubi extra vas maius, nempe G Y = 218 part atque diſtantia orbiculi O P ab extremo tubuli Y = 135 part.

EXPERIMENTVM II.

Inſtitutum fuit die 3. Iunii, atque in eo vas maius, leniter aquam ſemper affundendo, conſtanter plenum fuit ſeruatum, tubus vero E Y vtrinque breuior factus eſt. Tum inueni diſtantiam Z L = 4608 part. Y Z = 2058, pondus totale in I appenſum 1549 Gran. H I = 2095, G M = 89; pondus vero aquae cylindrico vaſe $\alpha\beta\gamma\delta$ contentae retinui quale illud heri repereram. Ex his itaque fit altitudo debita celeritati aquae in X exſilientis = 2579 part. pondus cylindri aquei correcti = 860 Gran. et huius duplum = 1720 Gran. Colligitur vero ex obſeruatione impetus in orbiculum realiter factus = 1463 Gran. vnde Theoria rurſus pondus in Experimento obſeruatum excedit 257 Granis.

EXPERIMENTVM III.

Feci die 5. Iunii vaſe maiori conſtanter pleno ſeruato, tubi vero prominentiam G Y plane abſcindi curaui, retinuique ſolam G E. Atque tum inueni diſtantiam N L = 4755 part. M N e medio foraminis G M ſumtam = 2053, pondus totale in I appenſum = 1549 Gran.

H I =

HI = 2127; GM = 86, pondus aquae, cylindrico vaſe alio contentae, cuius diameter eſt = 453, altitudo = 744, deprehendi = 6191 Gran. ex quibus oritur altitudo debita celeritati aquae in GM exſilientis = 2753 part. Pondus cylindri aquei correcti = 825½ Gran. et huius duplum 1651 Gran. Colligitur autem ex obſeruatione impetus in orbiculum realiter factus = 1486 Gran. vnde Theoria denuo pondus ab Experimento indicatum excedit 165 Granis.

EXPERIMENTVM IV.

Inſtitui die 18. Iunii praeſente et iuuante Clar. Eulero noſtro; et, maiori vaſe rurſus conſtanter pleno ſeruato per continuam lenem affuſionem aquae, inuenimus diſtantiam NL = 4557 part. MN = 2044 part. pondus totale in I appenſum = 1609 Gran. HI = 1928 part. GM = 88 part. TX = 2213, pondus aquae cylindricae, cuius diameter = 686, et altitudo = 442, erat 8477. Gran. Ex quibus emergit altitudo debita celeritati aquae in GM exſilientis = 2539 part. pondus cylindri aquei correcti = 801 Gran. et huius duplum = 1602 Gran. Colligitur autem ex obſeruatione actualis impetus in orbiculum factus = 1401 Gran. vnde Theoria adhuc pondus ab Experientia indicatum excedit 201 Granis.

EXPERIMENTVM V.

Sumtum fuit die 2. Februarii 1737, et repetitum die 7. Febr. praeſente Ill. Praeſide et plerisque Membris Academiae. Inuenta autem fuit diſtantia NL = 4469, MN = 2015, pondus totale in I appenſum = 1549 Gran.

Gran HI = 1983, GM = 86, TX = 2188, pondus aquae cylindricae, cuius diameter 128, altitudo 278, erat 190 Gran. Ex quibus emergit altitudo debita celeritati aquae in GM exſilientis = 2478 part., pondus cylindri aquei correcti = 764 Gran. et huius duplum = 1528 Gran. Colligitur autem ex obſeruatione actualis impetus in orbiculum OP factus = 1403 Gr. vnde rurſus Theoria pondus ab experientia indicatum excedit 125 Granis.

EXPERIMENTVM VI.

Sumtum eſt ab ipſo Clar. Bernoulli, et in laudatiſſima ipſius Diſſertatione deſcriptum, cuius circumſtantias ad meam Figuram referam. Erant itaque ZL = 900 part. quarum 400 faciunt pedem Pariſinum; YZ = 900 part. pondus in I appenſum dicit fuiſſe paulo maius quam 1020 Gran. ſumam ergo 1021 Gran. Erat autem in vecte ipſi adhibito HI = TX; et GM = 19 part. pondus aquae cylindricae, cuius diameter 92 et altitudo 131 part, erat 122 Drachmar. vel 7320 Gran. Ex his emergit altitudo debita celeritati aquae libere exſilientis = 225 part. pondus cylindri aquei correcti = 536 Gr. huius duplum = 1072. Obſeruatio vero ipſa dedit impetum aquae in orbiculum = 1021 Gr. hinc Theoria etiam tum pondus ab experientia indicatum exceſſit 51 Granis.

DE

OBSERVATIONES METEOROLOGICAE.

1738. INSTITVTAE

A

Georgio Wolffg. Krafft.

§. 1.

Durante hoc anno 1738. obſeruatae fuerunt a me altitudines Barometri ſingulis menſibus maximae et minimae ſequentes:

		maxima	miuima	diff.
1738.	Ianuarius	— 30. 22	— 28. 55	— 1. 67
	Februarius	— 30. 67	— 28. 26	— 2. 41
	Martius	— 29. 90	— 28. 99	— 0. 91
	Aprilis	— 30. 15	— 29. 20	— 0. 95
	Maius	— 29. 98	— 29. 31	— 0. 67
	Iunius	— 29. 78	— 29. 38	— 0. 40
	Iulius	— 30. 04	— 29. 22	— 0. 82
	Auguſtus	— 30. 02	— 29. 15	— 0. 87
	September	— 30. 21	— 29. 38	— 0. 83
	October	— 30. 78	— 28. 90	— 1. 88
	Nouember	— 30. 74	— 28. 90	— 1. 84
	December	— 30. 27	— 28. 75	— 1. 52

vbi quidem rurſus, numeri ante punctum poſiti denotant partes duodecimas pedis Londinenſis, hoc eſt, pollices Londinenſes; numeri autem poſt punctum poſiti ſignificant horum pollicum partes centeſimas, vti in praecedentium annorum obſeruationibus factum eſt.

§. 2. Apparet ex his altitudinibus Barometri, earum maximam hoc anno fuiſſe die 31. Octobris, in perfecta ſerenitate aliquot dierum, ſpirante facili Euro, cum frigore mediocri; quia vero haec altitudo maxima illam quae praecedente anno 1737 obſeruata fuit, nempe 30. 95, non excedit: haec adhucdum maxima omnium hic loci obſeruatarum manet. Minima autem Barometri altitudo hoc anno fuit 28. 26, quae extitit die 23. Febr. coelo nubilo aliquot dierum, variante vento, vt plurimum tamen flante Auſtro, frigore adhuc mediocri, et multa cadente niue. Quae igitur minima altitudo huius anni, cum antea inuentam, nempe 28. 18 ſuperet: manet adhuc idem ſpatium variationum Barometricarum praecedente anno ſtabilitum, nempe 2. 77. Atque id quoque, quod in praecedentibus obſeruationibus Barometricis iam obſeruaui, etiam hoc anno confirmatur; variationes nempe menſtruas in primis et vltimis anni menſibus eſſe maiores, minores autem in mediis. Quam ipſam obſeruationem ſtabilitam quoque deprehendo ex altitudinibus Barometricis Telone Martio (Toulon) in Gallia obſeruatis, atque a Rev. P. Du Chatelard ad Clariſſ. De l'Isle miſſis.

§. 3. Sequentem adhuc annotationem, quamuis magni momenti non ſit, tamen non puto plane contemnendam. Ex ſubitaneo lapſu vel aſcenſu mercurii in Barometro ventos oriri notum eſt; cum hoc indicio ſit ſublatum eſſe aëris noſtri cum vicinis regionibus aequilibrium. Sin itaque aër omnino quietus hac ratione commouendus, et ventus excitandus ſit, plerumque integri diei tempus, et plus aliquando, requiritur, antequam toti maſſae aëreae

motus

motus in plagam aliquam conſpirans communicetur, prout ex ſequentibus obſeruationibus pateſcit, in quibus ſignificat ventos N Boream, O Eurum, S Auſtrum, W Zephyrum, adſcriptique numeri exprimunt vim venti, 1 paruum, 2 ſenſibilem, 3 fortem, 4 furentem.

					Barom.	Ventus	
I.	1737	Decembr.	30	10 pm	30. 22	NW	2
			31	8 am	27	o	o
				1 pm	27	o	o
	1738	Ianuarii	1	8 am	14	o	o
				10 pm	00	o	o
			2	8 am	29. 80	o	o
				1 pm	65	SW	1
				11 pm	30	SW	4
II.	1738	Ianuarii	25	10 pm	34	NW	3
			26	8 am	56	o	o
				10 pm	12	o	o
			27	8 am	22	o	o
				10 pm	17	o	o
			28	8 am	07	W	3
				11 pm	10	W	3
III.	1738	Octobris	2	12 mer	30. 38	NO	2
				10 pm	35	o	o
			3	8 am	33	o	o
				9 pm	23	o	o
			4	2 pm	08	o	o
				11 pm	29. 99	SO	2
			5	3 pm	.60	SO	2

§. 4. Multis obſeruationibus mihi conſtat, accidere quam ſaepiſſime vt oriente circa veſperam Luna nebulae et nubes, totum ante diem obfuſcantes, diſpellantur, reddaturque aër perfecte ſerenus, quod praecipue factum eſt diebus ſeptembris 11. 12. 13. 14 et 15. anni 1738. Cuius quidem phaenomeni cauſam in mutua actione Lunae et Terrae poſitam eſſe exiſtimo. Cum enim extra omne dubium conſtitutum ſit, Lunae actionem ſiue attractionem in Terras redundantem aeſtus marinos excitare, hoc eſt, aquas ad ſe quaſi rapere atque altius extollere: multo facilius eadem haec actio tenues nebulas in ſummo aëre circumuolitantes afficiet, atque eas altius attollendo rarefaciet, penitusque diſpellet; ita vt probabile ſit, extimam Atmoſphaerae ſuperficiem ab actione Lunae hic attolli, illic deprimi, atque ſic aeſtus marinos quodammodo imitari.

§. 5. Auroras Boreales hoc anno obſeruaui ſequentes:

1738.	Februarii	1.	in perfecta ſerenitate viſa fuit Lux Borea, ſed humilis tantum, flante Borea.
	Auguſti	8.	in perfecta quoque ſerenitate viſa eſt aurora Borealis, ſed debilis, nullo ſpirante vento.
		24.	poſt pluuias, et frequentes coruſcationes verſus SO, apparuit tenuis Lux Borea, nullo flante vento, quam inſecuta eſt poſtero die ſerenitas.
	Septembris	8.	in perfecta ſerenitate viſa fuit Lux Borea debilis, ſpirante Auſtro.

Octobris

1738. Octobris 1. in perfecta ſerenitate aliquot dierum, flante Borea, apparuit Lux Borea, quam ſequebatur congelatio vniuerſalis.

Nouembris 21. poſt pluuias et nubes circa horam 10. p. m. coelum ſerenum redditum fuit, atque viſa Lux Borea, redeuntibus poſtea nubibus et pluuiis.

25. Aurora Borealis obſeruata fuit nubibus permixta, quam nix ſequebatur.

§. 6. Prima congelatio facta eſt hoc anno, in ſerenitate aliquot dierum, d. 2. Octobris, quae per aliquot dies ſubſtitit flante fortiter Euro-Borea. Contigit ergo haec prima congelatio ipſo die Nouilunii tum celebrati, quo die ſimul erat △☉♂, praecedente Aurora Boreali. Inſequente hanc primam congelationem die, nempe d. 3 Octobris obſeruatae ſunt horis matutinis ingens nebula, et pruina vniuerſalis. Cum enim per aliquot dies praecedentes perfecta fuiſſet ſerenitas, aërque ita grauis, vt Barometrum ad 30. 38 tandem eleuauerit, factum eſt, vt die 3. Octobris ſubito illud deprimeretur, atque ſic exhalationes praecedentium dierum calore e terra niue libera excitatae, delaberentur, et terris frigidis adſperſae congelarentur.

§. 7. Ope Thermometri mercurialis, quod in praecedentibus deſcriptum fuit, atque ſemper ita locato, vt ab aëre libero quidem afficeretur, ſed a ventis et Sole tutum eſſet, obſeruaui hoc anno maximum calorem fuiſſe d. 22. Iulii, quo die h. 2. p. m. Thermometrum oſtendebat gradum 112 $\frac{4}{10}$, qui reſpondet Thermometri Fahrenheitiani gradui 77. Mutantur enim gradus Thermometri Delisliani in Fahrenheitianos, ſi illi gradus ſubſtituantur

pro *m* in hac formula, $212 - \frac{6m}{5}$, quia illius gradus 0 et 150 reſpondent huius gradibus 212 et 32. In ſequente die 25 Iulii idem fere calor rediit, nempe graduum $112 \frac{5}{10}$, quo die Thermometrum libero ſoli expoſitum hora $2\frac{1}{2}$ p.m. monſtrauit tandem gradum 91, vel Fahrenheitianum 103, quo etiam die grauis tempeſtas cum imbre vehementi ingruit. Maximum vero frigus obtinuit die 1 Decembris, oſtendente Thermometro in ipſo meridie gradum $176 \frac{5}{10}$, qui congruit cum Fahrenheitiano $0\frac{1}{5}$, flante mediocri Euro, in ſerenitate aliquot dierum.

§. 8. Tonitrua hoc anno audita fuerunt diebus ſequentibus, Maii 30, cum pluuia et vehementi Zephyro hora 8 p. m. Iunii 5 ſine pluuia; 19 cum imbre ſubito et breui, 21 ſub iisdem circumſtantiis, 26 orta eſt grauis tempeſtas, cum imbre vehementi et vento fortiſſimo ex plaga Zephyro-Auſtrali. Iulii 15 cum pluuia, 17 cum pluuia breui, redeuntibus tonitruis circa veſperam, 19 cum imbre vehementi, 21. 22. 23. aëre ſemper nubilo et pluuio, 25 oriebatur grauis tempeſtas et imber vehemens, flante fortiſſimo Borea-Zephyro per horae ſpatium, 27 toto tempore antemeridiano, cum forti pluuia, 30 inter pluuias. Auguſti 10 cum forti pluuia, praecedente et redeunte ſerenitate, 19. 22 cum pluuiis, 24 inſequente Aurora Boreali. Septembris 5 poſt pluuiam; quibus adiungo, primas hirundines mihi viſas fuiſſe d. 4 Maii.

§. 9. Pluuias et Niues aeſtimatione tantum perpendens inuenio in hoc anno dies 61 integros pro pluuioſis et niuoſis eſſe habendos, atque menſium habita ratione

Ianua-

Ianuarium niuium fuiſſe feraciſſimum. Fluuii noſtri Neuae tumores experti ſumus Ianuarii 9, quo die flante fortiſſimo Auſtro-Zephyro inundatio magna extitit, quae coepit hora matutina ſexta, 24. Iunii 15. Septembis 2.

§. 10. Procellas experti ſumus diebus ſequentibus, Ianuarii 2. 8. 9 cum inundatione, 17. 18. Martii 27. Iunii 15 cum egreſſu fluuii, 26 cum graui tempeſtate, Septembris 2.

§. 11. Reliqua, quae referri huc debent, comprehendam ſequentibus. Februarii 17 hora 11 p. m. Halo Lunaris obſeruatus fuit breui tempore durans, cum coelum per multos antea dies ſerenus, nec niſi nebulis quolibet ſere mane obortis turbatum, nubibus obduci inciperet, cadente Barometro, et tandem biduo poſt inſecuta niue copioſa. Aprilis 27 hora 4 p. m. viſa fuit Iris duplex poſt ſubitas pluuias cadente Barometro obortas. Octobris 30, in perfecta ſerenitate, obſeruati fuerunt vapores e fluuio aſcendentes ita copioſi, vt nebulae inſtar aquae ſoli inſiderent, toto die durantes, circa meridiem autem tenuiores redditae; quod idem quoque accidit Nouembris 1. Reliquae nebulae terram occupantes hoc anno fuerunt Ianuarii 24. 31. Februarii 7. 9. 13. 14. 16. 17. Martii 9. 12. 22. Aprilis 3. 4. 7. 10. 20. Iunii 28. Iulii 11. 13. 14. 21. Auguſti 15. 17. 21. 22. Septembris 12. 15. 24. 26. 27. Octobris 3. 7. 21. Nouembris 9. 16 18. Decembris 4. 7. 22. De ventis quoque id adhuc obſeruandum eſt, accidiſſe huius anni die 13 Nouembris, quod ſilentibus iis per plures dies, hoc die circa horam 8. a. m. coeperit ſpirare Auſtro-Zephyrus ſatis fortis, remittens vero aliquid de vi ſua circa horam 1. p. m. pluuiis et

niuibus

niuibus interea mixtim cadentibus; hora autem 8. p. m. ſubito mutatus is eſt in Boream fortem et increſcentem, qui, ceſſante omni pluuia et regelatione, niuem copioſam attulit, dum toto die Barometrum caderet, poſtero vero die aſcenderet iterum, cum frigore mediocri ſed increſcente. Illud denique praeterire non poſſum, quamuis praefiſcine id dictum velim, accidiſſe a menſis Nouembris die 17 vsque ad 24, vt continua regelatio regnaret; ſed cum die 24 celebrata fuiſſet ☍☉♂, ſubito mutatum eſſe aërem, vt frigus eo ipſo die auctum fuerit, et die 26 vsque ad gradum 15 Thermometri Fahrenheitiani peruenerit.

§. 12. Referam nunc annotationes quosdam ad rem Meteorologicam forſan non inutiles, qnos e Diario ſimilium obſeruationum a Clariſſ. Gmelino in itinere verſus Kamtſchatkam verſante ſummo ſtudio factas, et ab Academia mecum communicatas deprompſi. Fertilior enim in hoc ſtudii genere ſemper eſt ſeges ea, quae alienis ipſa ſe adauget herbis; et falcem in propriam et peregrinam ſimul immittit meſſem; quippe quae compilatio horrea Meteorologiae ſola ditat. Factae ſunt obſeruationes, quas in vſum nunc meum vertam, in Kirengenſi munimento, ad confluentem fluuiorum Kirengae et Lenae ſito, ab Octobris 1. 1737 ad 28 Febr. 1738. Latitudo huius munimenti ex recentiſſimis Mappis Geographicis deſumta inuenitur $57^{\circ}\frac{1}{2}$, et diſtantia inter illud et Petropolin reperitur milliarium Germanicorum iuxta Homannum 525, iuxta Stralenbergium $577\frac{1}{2}$, iuxta Kirilouium vero $637\frac{1}{2}$, quorum aſſumam medium 580 dictorum milliarium, quae in parallelo 60 graduum efficiunt quam proxime differen-

tiam

tiam miridianorum Petropolitani et Kirengenſis 5^h $9'$. Quibus praemonitis ſequentia deduxi ex iſtis obſeruationibus Corollaria.

§. 13. Primo quidem Kirengae altitudo maxima Barometri in hoc quadrimeſtri tempore fuit partium milleſimarum pedis Regii Pariſienſis 2770 Decembris 10, 1737, coelo ſereno per aliquot dies. Minima autem fuit Decembris 26, 1737, et Februarii 14, 1738, nempe 2627 dictarum partium, coelo niuoſo, et flante Zephyro cum vi ſumma, vtraque vice. Harum altitudinum differentia, ſiue variatio Barometri quadrimeſtris, ergo ibi fuit 143 partium earundem. Hic vero loci obſeruata fuit eodem durante tempore variatio Barometri 2 $\frac{69}{100}$ pollicum duodecimalium pedis Londinenſis, qui coincidunt cum 224 partibus milleſimis huius pedis, quae, poſita ratione inter pedem Pariſinum et Londinenſem vti 16 ad 15, efficivnt 210 partes milleſ. pedis Pariſini. Itaque in hoc ſpatio quadrimeſtri variatio Barometri Petropolitana maior fuit quam Kirengenſis.

§. 14. Secundo maximum frigus Kirengae obſeruatum fuit die 9 Ianuarii 1738, notante Thermometro Delisliano gradum 275, qui congruit cum Fahrenheitiano — 118, ſiue 118 infra 0; quod frigus ſane ingens fuit; cum omni adhibito artificio, ope nimirum ſpiritus nitri adeo frigefacti vt gelari inciperet, Fahrenheitianum Thermometrum non potuerit magis deprimi quam ad gradum 40 infra 0, vel ad gradum 210 noſtri Thermometri, vti apparet ex *Elementis Chemiae Boerhauianis pag.* 162 *Tomi I.*

§. 15. Tertium eſt, quod in eodem Thermometro Kirengenſi prorſus inexſpectatum accidit, mutatio nempe adeo ſubita, vt aſcenſus mercurii oculis diſtingui potuerit. Nam Nouembris 27, 1737, erat illud Thermometrum tempore matutino in gradu 218, tempore meridiano in gradu 270, qua obſeruatione vix conſignata cum denuo accurreret Clar. Gmelinus ad Inſtrumentum, iam illud notabat 265, et continuo ipſo praeſente et adſtante altius aſcendit, donec poſt effluxum ſemihorii oſtenderet 195, et veſperi hora 11 monſtraret 176. Eodem hoc tempore ventorum mutatio ſequens obſeruata fuit. Die Novembris 25 deſinebat ſpirare Boreas, diebus 26 et 27 nullus erat ventus; d. 28 vero hora 4 matutina flare coepit Auſter cum vi ſumma, ſecutae ſunt eodem die niues minutae humidae, cadente Barometro, incaluitque aër poſt aliquot dies vſque ad gradum 163. Idem hoc phaenomenon accidit quoque 1737 Decembris 11, vt nempe Thermometrum circa horam 3 p. m. tempore 13 minutorum primorum a gradu 252 ſubito et continuo motu aſcenderit ad gradum 210, hoc eſt per 42 gradus. Venti eodem quo antea modo ſe habuerunt. Erat enim diebus 9[b], 10, et 11, nullus ventus, die vero 12 primo mane exoriebatur vehementiſſimus Zephyrus, Barometro cadente, et inſequente tempeſtate calida aliquot dierum vſque ad gradum 168.

§. 16. Huius quidem vtriusque inconſueti phaenomeni cauſa ex eo mihi deriuanda eſſe videtur, quod in vtroque caſu vehementes et ſubiti venti exorti fuerint. Cum enim durante primo aſcenſu, hoc eſt, Nouembris 27 hora 11 p. m. nullus ventus ſpiraret, et deinde poſt me-

diam

diam noctem inſequentem procelloſus Auſter inſurgeret : concludere licet, hunc ventum e terris verſus Auſtrum ſitis egreſſum iam tum initium ſumſiſſe cum praecipiti aſcenſu Thermometrum variatum fuit, atque primum quidem aëri Kirengenſi vicinorumque regionum magnam vim vaporum humidorum et calidorum infudiſſe, qua is ſubito incaleſcebat; hac itaque vaporum accumulatione aëri permixda Thermometrum multo citius affectum fuiſſe, quam motus ipſe aëri Kirengenſi potuerit imprimi, vt et is omnis eadem directione et celeritate, quam incurrens aër, tandem latus fuerit, quod poſt 5 circiter horas demum factum eſt. Idem de altero caſu iudicium ferri poterit, quo aliquot poſt phaenomenon horis vehemens Zephyrus exoriebatur. Cum enim eo, et multis praecedentibus diebus conſtans regelatio Petropoli, et ſine dubio etiam in locis Kirengam inter et Petropolin iacentibus ſentiretur: etiam hoc caſu fieri potuit, vt excitatus in loco occidentaliori ventus ſubitus aërem Kirengenſem maxima humidorum et calidorum humorum copia inundauerit, atque ea aſcenſum ſubitum Thermometrorum prius effecerit, quam violentus is motus toti aëris Kirengenſis maſſae conciliaretur.

§. 17. Quarto vt aliquid etiam de ratione directionis ventorum in tanta diſtantia 580 milliarium Germanicorum innoteſcat, apponam eorum aliquot exempla:

		Kirenge		Petropoli
Octobris	10 —	W 4	—	W 4
	14 —	W 4	—	0 0
	20 —	W 4	—	0 0
	24 —	W 4	—	W 3

Nouembris	18	—	W 4	—	S	1
	20	—	W 4	—	S	3
Decembris	19	—	W 4	—	O	2
	23	—	W 4	—	O	2
	24	—	W 4	—	O	2
	26	—	W 4	—	o	o

Ex his deduci poteſt, probabile eſſe dari quandoque Zephyrum, qui ex hac regione noſtra vſque ad Kirengam, et multo longius, continuo tractu feratur, adeoque milliaria forſan 600 aut 700 peruagetur, quod ex Octobris 10, 24, apparet. Illud enim praetereo, quod in tanto locorum interuallo diuerſi et directione et impetu venti exiſtere poſſint, quippe quod in locis etiam multo minus diſtantibus ſaepiſſime obſeruatum fuit.

§. 18. Quinto, quod phaenomenum die 5 Decembris 1737 apud nos conſpicuum in Diario Meteorologico praecedentis anni retuli, rubedo nimirum coeli inconſueta, et multorum ſpectatorum animos terrens, de qua etiam in Nouis publicis mentio facta eſt, viſam eam fuiſſe aliquibus in locis ſimul cum globo igneo in aëre diſrupto: eius iam cauſa vera, quae eo tempore in ſuſpicionem tantum veniebat, nunc nobis conſtat. Cum enim rubedo haec fortiſſime appareret apud nos circa horam 10 nocturnam, hoc eſt, in tempore Kirengenſi die 6 Decembris circa horam 3 matutinam, (§. 12.) refert Clariſſ. Gmelinus die 6 Decembris hora circiter 1 poſt mediam noctem ibi viſam fuiſſe magnam Auroram Borealem, rubro colore ludentem, et radiis fere in ipſum Zenith elevatis; teſtatur vero ſimul, *plagam occidentalem, licet nullis radiis*, directis ſcilicet, reflexi enim non impediebantur,

tur, *aut arcu lucido conſpicua fuerit*, *luce tamen neſcio quadam* inconſueta oculos feriiſſe. Similis rubedo viſa fuit hic Decembris 22; ſed Kirengenſe coelum nubibus obtectum fuit, adeoque eandem cauſam, vti etiam hic factum eſt, nebulis abſcondidit. Similis rubedo coeli, orta ex eadem hac cauſa, obſeruata fuit Vpſaliae, anno 1726 d. 8. Octobris, ſt. v. memorante Clariſſ. *Er. Burman* in Actis Literariis Sueciae ad annum 1727 p. 256.

§. 19. Sexto denique neſcio annon nimis ſim audax, ſi ex comparatione Obſeruationum Kirengenſium et Petropolitanorum aliquid de ventorum celeritate ſtatuere velim. Anno 1737 d. 10 Octobris mane hora 8 notatum apud me reperio Zephyrum cum violentia 3, cum praecedens veſpera a ventis plane quieta fuiſſet. Ponam itaque ventum hunc apud nos coepiſſe hora 6 a. m. coepit ergo in tempore Kirengenſi $11^h\,9'$ a. m. ſed diſerte notatum eſt a Clar. Gmelino, incepiſſe ibi furere Zephyrum violentia magna $8'\,30'$ p. m. cum antea ventus modicus eſſet ex plaga Cephyro-Auſtrali. Sin ergo ponam eundem ventum noſtri aëris continuo motu illuc delatum eſſe, ſequitur abſoluta eſſe ab eo 580 milliaria Germ. tempore $9^h\,21'$: Efficiunt autem haec 580 milliaria Werſtas 4060, hoc eſt pedes Londinenſes 14210000; ergo ſtante hypotheſi noſtra idem ventus fortiſſimus ſpatio vnius minuti ſecundi abſoluit 422 pedes Londinenſes, quod ſpatium eidem tempori debitum communiter non niſi 50 pedum Authores ſtatuunt.

OBSERVATIONES METEOROLOGICAE ANNI 1739.

AVCTORE

Georgio Wolffg. Krafft.

§. 1.

Currente hoc anno 1739 obſeruatae fuerunt a me altitudines Barometri ſingulis menſibus, maximae et minimae, ſequentes, in quibus numeri ante punctum poſiti denotant partes duodecimas, ſiue pollices, pedis Londinenſis, numeri autem poſt punctum poſiti denotant horum pollicum partes centeſimas, quam diuiſionem in praecedentibus quoque adhibui obſeruationibus

1739	Ianuarius	— 30 . 01	— 28 . 48	— 1 . 53
	Februarius	— 29 . 88	— 28 . 60	— 1 . 28
	Martius	— 30 . 13	— 28 . 68	— 1 . 45
	Aprilis	— 30 . 09	— 29 . 05	— 1 . 04
	Maius	— 30 . 12	— 29 . 18	— 0 . 94
	Iunius	— 29 . 80	— 29 . 08	— 0 . 72
	Iulius	— 29 . 80	— 29 . 31	— 0 . 49
	Auguſtus	— 29 . 87	— 29 . 30	— 0 . 57
	September	— 30 . 21	— 29 . 05	— 1 . 16
	October	— 30 . 24	— 29 . 45	— 0 . 79
	Nouember	— 30 . 08	— 28 . 77	— 1 . 31
	December	— 30 . 36	— 29 . 23	— 1 . 13

§. 2. Apparet ex his altitudinibus Barometri earum maximam hoc anno fuiſſe 30. 36, quae obſeruata fuit die 7 Decembris in perfecta ſerenitate aliquot dierum, ſpirante leni Auſtro-Euro, cum frigore ſummo; quia vero haec altitudo maxima illam quae anno 1737 obſeruata fuit, nempe 30. 95, non excedit; haec adhuc dum maxima omnium hic loci obſeruatarum manet. Minima autem Barometri altitudo hoc anno fuit 28. 48, quae extitit die 6 Ianuarii, coelo nubilo aliquot dierum, flante adhuc leui Auſtro-Euro, frigore mediocri. Quae igitur minima altitudo huius anni cum in praecedentibus annis inuentam, nempe 28. 18, ſuperet: manet adhuc idem ſpatium variationum Barometricarum, antea ſtabilitum, nempe 2. 77: ſuntque adhuc variationes menſtruae in primis et vltimis anni menſibus maiores, minores autem in mediis.

§. 3. Auroras Boreales hoc anno obſeruaui ſequentes.

1739	Ianuarii	19	in perfecta Serenitate aderant veſtigia lucis Borealis aëre tranquillo, quam nubes tenues ſecutae ſunt.
		21	in aliqua ſerenitate iterum aderant veſtigia tantum lucis Borealis, aëre tranquillo, quam iterum nubes ſecutae fuerunt.
	Febr.	16	in aliqua ſerenitate aderat lux Borea, trabe rubra vna, et quibusdam aliis albis conſpicua, ſubſequente perfecta ſerenitate.

1739

1739 Febr. 25 in perfecta ſerenitate, poſt niuem turbulentam conſpiciebatur lux Borea, arcu pallido, ſed virgis et faculis praedita, flante violento Borea-Zephyro et continuata ſerenitate.

28 iterum in perfecta ſerenitate apparuit lux Borea debilis, flante vehementi Borea-Zephyro, et manente ſerenitate.

Martii 1 erat lux Borea, virgis inordinatis ludens, in perfecta ſerenitate, flante Zephyro ſequente niue copioſa.

2 in perfecta ſerenitate, veſperi oborta, apparuit lux Borea debilis, inſequente niue.

3 denuo aderat lux Borea debilis, in perfecta ſerenitate, flante Auſtro, inſequente nebula inſigni.

4 adhuc apparuit lux Borea debilis, in perfecta ſerenitate, flante forti Auſtro, et inſequente niue turbulenta.

18 apparuit lux Borea nubibus permixta, Ratisbonae quoque viſa, teſtantibus nouis publicis, flante admodum tenui Euro.

30 in perfecta ſerenitate, flante forti Borea, apparuit lux Borea, confuſis virgis in Zenith aſcendentibus.

Aprilis 20 in ſerenitate fere integra, flante tenui Auſtro, conſpiciebatur lux Borea, in toto Horizonte, praeter eas plagas quas crepuſculum occupat, virgis aſcendentibus manifeſta.

1739

1739 Auguſti 17 in perfecta ſerenitate, ſpirante nullo vento, apparuit lux Borea fortis, quam nubes et pluuiae inſequebantur.

20 iterum in perfecta ſerenitate aderat lux Borea humilis.

26 in multa ſerenitate aderant veſtigia Lucis Borealis.

29 Veſtigia Lucis Borealis in ſerenitate perfecta.

Sept. 12 in perfecta ſerenitate comparuit lux Borea, multis virgis oblongis, et prope Zenith polum formantibus, conſpicua.

16 veſtigia Lucis Borealis, inſequente pruina et leui glacie.

17 lux Borea mediocris.

Dec. 22 flante forti Borea Zephyro, inter nubes viſa eſt lux Borea, antecedentibus praecedente die coruſcationibus verſus Auſtro-Zephyrum, et inſequente niue.

23 lux Borea in perfecta ſerenitate.

§. 4. Prima congelatio facta eſt hoc anno d. 6 Octobris, coelo nubilo, nullo vento ſpirante. Contigit ergo haec prima congelatio die plenilunium inſequente, et in quo ſimul erat □ ☉ ♄.

§. 5. Maximum frigus huius anni incidit in d. 7 Decembris, monſtrante Thermometro meo in libero aëre hora 10 nocturna 188 gradus, ſiue $13\frac{3}{5}$ gradus frigoris Thermometro Fahrenheitiano, in perfecta ſerenitate aliquot dierum, flante leui Auſtro-Euro. Praeterea quoque

d. 5 Februarii frigus ita intenſum regnabat, vt ſpiritus vini Gallicus ordinarius, per noctem libero aëri expoſitus, cruſta forti glaciali obduceretur, infra quam cruſtam reliquum ſpiritus quaſi coagulatum erat, inſtar cerae mollis.

§ 6. Tonitrua hoc anno audita fuerunt diebus ſequentibus: Aprillis 26 die nouilunii, cum pluuia ſubita et breui, flante tenui Auſtro-Zephyro. Maii 7 cum pluuia forti. Iunii 23 cum imbre ſubito et forti, flante leui Zephyro. Iunii 27 ſine pluuia et vento. Iunii 29 cum pluuia forti. Iunii 30 pluente adhuc coelo. Iulii 13 cum breui pluuia, Auguſti 1 cum pluuia modica, Auguſti 25 cum imbre longo. Decembris 21 coruſcationes ſolae verſus Auſtro-Zephyrum animaduerſae ſunt, flante forti Zephyro, in ſequente ſimul altero die luce Borea. Primas quoque hirundines, vt etiam hoc adiiciam, vidi Aprilis 30, aëre exiſtente perfecte ſereno, et ad gradus 46 Thermometri Fahrenheitiani calente

§. 7. Pluuias et Niues aeſtimatione tantum perpendens, inuenio, in hoc anno dies 45 integros pro pluuioſis et niuoſis eſſe habendos, atque menſium habita ratione Iunium pluuiarum fuiſſe feraciſſimum. Fluuii noſtri Neuae tumores experti ſumus Iulii 10 flante vehementi Auſtro-Zephyro et Octobris 26 flante leniter eodem vento.

§. 8. Ventos vehementes experti ſumus diebus ſequentibus: Ianuarii 5. 25. 26. 27. 31. Febr. 1. 2. 13. 14. 16. 18. 22. 23. 24. 25. 26. 28. Martii 5. 6. 10. 12. 15. 19. 30. Aprilis 16. 17. 18. 19. 22. 27. Maii 2. 3. 8. 14. 19. 22. 26. 27. 28. Iunii 4. 14.. Iulii 5. 10. 14. 15. 28. Auguſti 9. 11. 20. 22. 23. Sepsembris 13. 30. Octobris 1. 8. 9. 11. 14. 27. 28. 29. Nouembris 15.

15. 16. 17. 23. 24. 25. Decembris 2. 10. 11. 12. 19. 21. 22. 24. Procellas autem Februarii 14. Martii 6. Aprilis 17. 18. 19. Maii 28. Iulii 14. Octobris 11.

§. 9. Cum Iulii 24 huius anni eſſet Eclipſis ſolis viſibilis apud nos fere totalis, 11 nimirum digitorum, durante illa attendi quoque ad Thermometrum et Barometrum atque ſenſibilem in vtroque mutationem deprehendi, quam ſequenti laterculo ob oculos ponam:

Iulii 24.	1h	0′ p. m. —	123, 0 —	29. 69	
	5	6 — — —	122, 0 —	70	Initium
		55 — — —	122, 0 —	70	
	6	10 — — —	122, 8 —	70	
		14 — — —	123, 0 —	70	Med.
		20 — — —	122, 7 —	70	
		30 — — —	122, 8 —	70	
		50 — — —	123, 0 —	68	
	7.	17 — — —	123, 0 —	68	Finis
		30 — — —	124, 0 —	68	
	10	25 — — —	125, 9 —	70	

coelum toto hoc die, poſt Eclipſin quoque, erat perfecte ſerenum, flante tenui Zephyro. Apparet itaque ex his numeris, calorem aëris incrementum cepiſſe a meridie ad horam 5, qua incipiebat ſolis deliquium; quo properante verſus medium deſcendit Thermometrum ſucceſſiue vno gradu; verſus finem deinde vergente Eclipſi, ierum aſcendit, et denique reſtituta luce rurſus deſcendit a frigore veſpertino; vnde certum eſt, aërem ab Eclipſi hac frigus aliquod contraxiſſe, reſpondens $1\frac{1}{5}$ gradui Thermometri Fahrenheitiani. Quod idem primo obſeruatum

fuit ab Academia Scientiarum Pariſienſi, in Eclipſi ſolari anno 1666 Iulii 2, poſtea in Eclipſi ſolis totali, cum mora, anno 1706, Maii 12, a Clar. I. H. Hoffmanno, teſtantibus Miſcellaneis Berolinenſibus, editis 1710, p. 227 et denique a Clar. Delisle, Iuniori, in Commentar. Acad. Scient. Pariſ. ad annum 1715. Apparet quoque, Barometrum circa finem Eclipſeos per $\frac{1}{50}$ pollicis Londinenſis duodecimalis deſcendiſſe, et poſtea ad priſtinam altitudinem aſcendiſſe. Caeterum circa medium huius Eclipſis Lens cauſtica diametri 6 poll. phaſes Eclipſeos accuratiſſime in chartam proiecit, ſed luce ita debili, vt imaginem ſui chartae etiam nigrae non inureret; et lucis in aëre decrementum parum ſenſibile fuit etiam in maxima obſcuritate ſolis.

§. 10. Haud incongruum fore puto, ſi hoc loco mentionem quoque faciam Inſtrumenti alicuius noui, Meteorognoſiae inſeruientis, cuius ope ſciri poſſit, quemnam thermometri gradum frigus maximum attigerit in loco aliquo qui obſeruatore quotidiano deſtitutus ſit. Relinquatur enim tale Inſtrumentum ex gr in Noua-Sembla, ſaxo vel arbori affixum, a nautis in autumno hanc regionem deſerentibus, poterit ope eius ab iisdem, futura aeſtate redeuntibus, cognoſci, quemnam gradum frigus elapſae hyemis praeteritae maximum attigerit. Adhibeo autem huic ſcopo formam Thermometri vulgaris Drebbeliani, ſed ita formati, vt in tubulo, in quo liquor aſcendit et deſcendit, ad latus vnum efficiantur plura foraminula parua, in Tab. IV. Fig. 3. ſacculos vitreos prominentes, et deorſum inclinatos *a*, *b*, *c*, *d*, etc. hiantia, quales tubi, vt experientia didici, haud adeo difficulter ab artificibus peritis conflari poſſunt. Si enim

in

in frigore aliquo vehementi liquor aſcendat vſque ad *b*, implebuntur eo omnes ſacculi vſque ad *b*, et impleti manebunt, etiamſi poſtea ceſſante gelu liquor iterum deſcendat; ſin poſtea oriatur vehementius frigus; pari modo replebitur ſacculus *a*, praeter praecedentes, vt ita is, qui ſupremus inter repletos, finita hyeme, deprehendatur, indicium ſatis accuratum de intenſitate frigoris in tali loco maximi praebere poſſit, etſi, quod diffitendum non eſt, hoc Inſtrumentum expoſitum quoque ſit vitio Thermometri Drebbeliani ordinario, preſſioni nempe atmoſphaericae. Si denique timendum ſit ne liquor ordinarius, his Thermometris adhiberi ſolitus, congeletur, in eius locum poterimus mercurium ſubſtituere. (*)

(*) Inſtrumentum modo deſcriptum excogitaui Ao. 1740. cum in *Academia Scientiarum Petropolitana* adhuc verſarer, eiusdemque aliquod exemplum confici curaui, quod inter inſtrumenta Phyſica eiusdem Academiae aſſeruatur, *Camera F. Diuiſ. VII. No.* 43; inſcius plane idem tale thermometrum propoſitum fuiſſe ab *Ill. Ioh. Bernoullio*, iam anno 1698. in Epiſtola ad *G. G. Leibnitium* ſub titulo Thermometri *calorem praeteritum indicantis*, cuius deſcriptionem legi in *Virorum celeberr. Leibnitii et Ioh. Bernoulli Commercio Philoſophico et Mathematico, Tomo I. pag.* 373. quod inſigne opus editum eſt demum anno hoc 1745. Qua igitur innocentia mihi hoc inuentum attribui primum: ſimili nunc, candore illud Illuſtri huic ſuo Auctori meliora edoctus, lubentiſſime totum aſſero, nihilque ex hac laude mihi decerptum cupio; excelſa tanti viri in res Phyſicas atque Mathematicas, merita, ex hac etiam parte, impenſe veneratus. Scripſi Tubingae d. 12. Iul. 1745.

SCHEDIASMA
DE VENTORVM
OBSERVATIONE QVOTIDIANA, PER INTEGRVM AMPLISSIMVM IMPERIVM RVSSICVM, INSTITVENDA, CVM MAXIMO SCIENTIAE METEOROLOGICAE EMOLVMENTO.

AVCTORE
Georg. Wolffg. Krafft.

§. 1.

Tab. IV. Nondum elapſum eſt ſeculum, ex quo celebris ille Guerikius, obſeruata caſu quodam mercurii in tubo Toricelliano inconſtanti altitudine, anſam praebuit Barometrorum obſeruationi quotidie inſtituendae. Eſt enim is primus qui detexit hanc altitudinem mercurii in tubo Toricelliano ſuſtentati, et libero aëri expoſiti, indies mutari, et conſequenter per hanc altitudinis ſuae mutationem indicare, quod variis temporibus et diebus vario etiam pondere integra aëris atmoſphaera premat telluris ſuperficiem. Quam primum itaque elegans hoc inuentum orbi erudito innotuit, factum eſt, vt quam plurimi his obſeruationibus quotidie cum cura inſtituendis ſolicite incubuerint, ita vt earum catalogus hodie in ingentem cumulum accreuerit, et quotidie adhuc maiora capiat incrementa.

§. 2. Circa idem fere tempus ad maiorem etiam perfectionis gradum euecta fuerunt Thermometra. Haec, vti notum eſt, a Cornelio Drebbelio, Batauo, primum inuenta, ſed multis naeuis adhuc laborantia, ab Academicis

micis Florentinis emendata fuerunt. Quoniam itaque et in his libero aëri expoſitis mutatio inſignis ſingulis diebus obſeruata fuit: acceſſit priori Barometrorum obſernationi etiam horum Thermometrorum inſpectio quotidiana, quae effecit, vt hodie non minori Thermometricarum quam Barometricarum obſeruationum numero gaudeamus, in variis terrae locis inſtitutarum.

§. 3. Praetereo reliqua Inſtrumenta, quae ad aëris noſtri atmoſphaerici varias et mutabiles qualitates deprehendendas ſucceſſu temporis excogitata fuerunt; qualia ſunt Hygrometra, quae aëris humiditati aut ſiccitati; Manometra, quae eiusdem aëris denſitati vel grauitati ſpecificae, quam quouis tempore tenet, cognoſcendis inſeruiunt; quorſum pertinent quoque Hyetometra, quibus pluuiarum cadentium quantitas, Anemometra, quibus ventorum ſpirantium vis et vehementia, aeſtimari et menſurari ſolent; quoniam ea partim ob ipſorum imperfectionem, partim etiam ob difficilem elaborationem, neglecta fere hucusque fuerunt, et rariores cum iis inſtitutae obſeruationes occurrunt.

§. 4. Haec Inſtrumenta, cum quodlibet eorum ſeorſim ad ſcientiae Meteorologicae emendationem inuentum fuerit, atque palam ſit, ea omnia coniuncta huic eidem ſcientiae propagandae eſſe quam aptiſſima, ſi et omni adhibita circumſpectione conſtruantur, et deinde cum dexteritate ad vſus ſuos vocentur; vt adeo vere dici queat, nos ad Meteorologiae principia ſtabilia ponenda Inſtrumentis idoneis non deſtitui; haec, inquam, Inſtrumenta quid vtilitatis huic ſcientiae attulerint, ſi quis quaerat, reſponderi certe poſſint ſequentia.

§. 5.

§. 5. Barometrorum vſus 1. inſeruit ad cognoſcendum illud pondus atmoſphaericum, quo quauis hora et die pars aliqua ſuperficiei terreſtris premitur; 2. praeuideri poteſt, ex eorum lapſu aut aſcenſu ſubito, exoriturum eſſe ventum aliquem vehementem, ſed quis aut qualis ille futurus ſit, profunde ignoratur; 3. ſi altiorem teneat in ſe mercurium ſuſpenſum, quam ordinarie fieri ſolet, ſerenitatem conſpicimus vtplurimum, ſed praedicere eam vix poſſumus; 4. ſcimus etiam variationes eius maiores eſſe in locis ſeptentrionalibus quam verſus meridiem ſitis; 5. ope eius montium altitudines metiri vt cunque didicimus; ſi vero alii praeterea quidam harum machinarum vſus ſunt, illi certe, aeque vt hi iam allegati, ita comparati ſunt, vt tempeſtatum et mutationum aëris in poſterum futurarum ne minima quidem exinde hauriri poſſit ſuſpicio. Quod idem cum et magis adhuc de Thermometro, et reliquis Inſtrumentis Meteorognoſiae inſeruientibus, affirmari debeat: apertum aſt, detectas quidem eſſe ope horum Inſtrumentorum veritates phyſicae cognitioni aëris perutiles, neque eas parui momenti habendas, ſed nec adhucdum ita comparatas eſſe, vt Theoriae alicui praeſpiciendarum tempeſtatum et mutationum aëris vtiles eſſe poſſint; ſic vt omnis vtilitas in iis iam fere ſit exhauſta, omnisque ex iis, quem praebere poſſunt, ſuccus iam videatur expreſſus, vtque hinc vtraeque obſeruationes, et Barometricae et Thermometricae, incipiant hodie inter eruditos aliquantum vileſcere.

§. 6. Quodſi in cauſas inquiramus, quare factum ſit hucusque, vt ope horum Inſtrumentorum, nullo fere amplius defectu laborantium, nondum tamen illud aſſecuti ſimus,

quod

quod ſolicite ſemper quaeſitum fuit, praedictionem ſcilicet tempeſtatum et mutationum aëris: eas non tam, in harum tempeſtatum mira et inconſtanti varietate, quam in methodo has obſeruandi, quaerendas eſſe mihi videtur. Aeque enim multiplex et varia ſideribus cunctis, eorumque motibus ineſt inconſtantia, quam tamen feliciter hodie ad certas et conſtantes leges reuocarunt Aſtronomi; cuius euentus, qui illuſtris exempli loco in hoc noſtro negotio eſſe poteſt, nullas alias reperio rationes, quam quod 1. ſiderum obſeruationes ab antiquiſſimis temporibus ad noſtram aetatem peruenerunt; 2. cura maxima habetur in Inſtrumentis ad has obſeruationes Aſtronomicas inſtituendas exactiſſime elaborandis; 3. Regum et ſummorum Imperantium et iuſſus et clementia huic Scientiae prouehendae fere nunquam defuerunt; 4. Omnium obſeruatorum Aſtronomicorum in toto terrarum orbe eſt quidam quaſi mutuus nexus; quo deuincti inter ſe magnam quandam ſocietatem conſtituere videntur, quae in vno eodemque ſcopo obtinendo coniunctim laborat. Ad horum mediorum primum quidem recens aetas ſcientiae meteorologicae, et eius quaſi iuuentus, hodie nos non admittit; in ſecundo deſiderari quid poſſe, quod fundamentis ſaltim Meteorognoſiae ponendis magis fauere poſſit, vix video; tertium vero et quartum nulla aetate atque in nulla regione ſperari atque exſpectari confidentius poteſt, quam in hac noſtra, qua munificentia Auguſtae Imperatricis noſtrae, atque iuſſibus etiam et exhortationibus Eius ad ſublimia et hactenus incognita quaeuis inueſtiganda non inuitamur tantum indulgentiſſime, ſed quoque excitamur.

§. 7. Quod itaque maximum in Meteorognoſia adhuc

 ſuper-

ſupereſt, et votis tot Virorum hodie perſpicaciſſimorum expetitum atqne peroptatum iamdiu fuit: id Imperio Ruſſico, eiusque Dominatrici Potentiſſimae relictum eſſe videtur, fauentibus huic negotio et Auguſtae munificentia, et Imperii huius mirum extenſi amplitudine. Cum igitur tempeſtates omnes, aut aëris et coeli temperies, ſint vel Statae, vel Vagae, quarum illae innuunt generales mutationes aëris quae telluri noſtrae accidunt ob varium Solis erga nos ſitum, vti dum apud nos generaliter menſibus Decembris, Ianuarii et Februarii frigore et niue omnia conſtringuntur et teguntur; menſibus autem aeſtiuis calor redit; hae vero ſignificant intenſitates, harum mutationum generalium, modo minores, quibus accidit, vt ex. gr. vna hyeme ſaeuius frigus regnet, quam altera; vna aeſtate remiſſior calor ſentiatur, aut pluuiae copioſiores cadant quam altera: atque apud omnes ſcientiae naturalis authores in confeſſo ſit, praecipuam, et fere vnicam, harum tempeſtatum vagarum cauſam poſitam eſſe in Ventis inque horum vehementia et qualitatibus reliquis; neſcio quid ad Meteorognoſiae ſcientiam ſtabiliendam conducere magis poſſit, quam in ampliſſimo aliquo regno, quale eſt Ruſſicum, inſtituta ex animo deliberato, et per annorum aliquam ſeriem continuata, Ventorum Obſeruatio, vel potius Hiſtoria.

§. 8. Proponam itaque methodum, cuius ope obſeruationes hae ventorum inſtitui poſſint, ita vt vtilitas, quae exinde quaeritur; actu ipſo obtineatur, et tempore quidem, vt ſperare audeo, non nimis diuturno, ſed quinque aut ſex tantummodo annorum. Seligo igitur ad hoc opus Vrbes duodecim totius Ruſſiae ſequentes: 1. Riga, 2. Peters-

2. Perersburg, 3. Moſcau, 4. Caſan, 5. Aſtrachan, 6. Tobolski, 7. Kiof, 8. Archangel, 9. Iakutskoi, 10. Selinginskoi, 11. Wergolinskoi, 12. Nouogrod; atque has quidem eum in finem, vt primo Zephyrus et Eurus obſeruari poſſint in tribus Terrae parallelis, perque tractus longiſſimos, nempe in parallelo 50 graduum in Kiof et Selinginskoi, per ſpatium 617 milliarium Germanicorum; in parallelo 58 graduum in Riga, Petersburg, Nouogrod, Moſcau, Caſan, Tobolski, Wergolenskoi, per ſpatium 673 milliar. Germ. denique in parallelo 64 graduum in Archangel et Iakutskoi. per ſpatium 390 milliar. Germ. ſecundo, vt Auſter et Aquilo obſeruari queant per vrbes Aſtrachan, Caſan, Moſcau, Archangel, per interuallum 270 milliar. Germ. Sunt igitur hae Vrbes allegatae commodiſſimae, vt mihi quidem videtur, in quibus et Obſeruatores conſtitui, et Inſtrumenta mox indicanda locari, oportet.

§. 9. In qualibet deinde harum vrbium obſeruationibus inſtituendis accommodanda erit talis aliqua domus, quae et altiſſima reliquarum ſit, et recens adhuc aedificata, et ſatis firma, ne metus adeſſe poſſit, fore vt aliquot annorum ſpatio corruat, vel linea meridiana, ibidem ducenda, ſenſibili aliquo angulo mutetur; quae et ſimul in loco aliquo totius vrbis editiſſimo ſita ſit, liberum horizontem habeat, ita vt venti ſine vllo impedimento ad eam ex omni plaga affluere poſſint, et cuius altitudo ſupra proximum fluuium ſciatur. Quam ob cauſam, ſi quaedam harum vrbium nominatarum montibus cinctae ſint, neceſſe erit ipſas omittere in hoc negotio, atque eius loco eligere pagum aliquem proxime ſitum, in quo

domus conditionibus modo dictis praedita inueniri poſſit. In hac domo ita inuenta ſi obſeruator ſimul habitare poſſit, commodiſſimum id erit: ſin autem fieri hoc nequeat, aedicula propria ipſi prope hanc domum denuo aedificari debet.

§. 10. Domus inuenta iam ad inſtituendas obſeruationes adaptanda erit; quod breui tempore, ſine multis ſumptibus, a quouis fabro lignario, fieri poteſt; ſi, deſtructa tecti aliqua parte, in eius locum planities lignea ſubſtituatur, ex duris lignis, bene et diu ante ſiccatis, et dupliciter ſibi impoſitis, atque firmiter coagmentatis inter ſe; quae planities ſpatium non maius quam 9 pedum quadratorum, quale eſt menſae alicuius quadratae mediocris, vt occupet, neceſſe eſt. Ipſum hoc tabulatum et horizontaliter poni, et cum cura laeuigari debet in parte ſuperiori; et prope illud ſcala admota ſit, per quam commode et ſine periculo adſcendere ad hanc planitiem obſeruator poſſit quouis tempore.

§. 11. Quoniam itaque ventorum praecipue cura haberi debet in his Obſeruatoriis hucusque deſcriptis, atque omnis fere horum obſeruatio reſtringitur ad eorum Directionem et Vehementiam: dicam primo, qua ratione, meo quidem iudicio, obſeruari debeat directio ventorum, vt ſcopo intento ea ſufficere poſſit. In tabulato igitur antea memorato deſcribenda primum erit linea meridiana, et circa hanc diuiſio horizontis in 16 plagas accurate adornanda, diſtinctisque lineis rectis depingenda. Puto enim, cum aliis ventorum obſeruatoribus, his 16 plagis obſeruationes has ea omni exactitudine abſolui poſſe, quae hic requiri poteſt.

§. 12.

§. 12. Abſoluta diuiſione horizontis in plagas, adſcriptisque earum nominibus ordinario modo, erigatur in centro harum diuiſionum ſtylus ferreus, altitudinis vnius pedis, verticaliter poſitus, et in apice cuſpide acuta, politaque, inſtructus, cui vexillum imponi poſſit ſequenti modo elaborandum. Fiat ex quatuor virgis ligneis, aridis, et probe exſiccatis, vt machinula pondus exiguum habeat, rectangulum ABCD, cui dein ex vtraque parte Tab. IV. charta agglutinanda erit; poteritque eſſe longitudo AB fig. 4. $1\frac{1}{2}$ pedis, latitudo AD 1 pedis; huic rectangulo affigantur ſupra et infra duo brachia orichalcina BE et CG, quorum illud BE in parua diſtantia a B, et in medio ſui, teneat capitellum F, quale acubus magneticis tribui ſolet, conice excauatum, et optime politum, imo in vſu ipſo plumbagine adhuc inducendum, vt ad modum acus magneticae ſtylo prius memorato impoſitum quam maxime volubile exiſtat, alterum brachium inferius CG in medio ſui habeat annulum H, qui interiorem ſuperficiem, vbi nempe ſtylum prius indicatum circumdare debet, habeat politiſſimam, plumbagine etiam in vſu illinendam, cui fini quoque ſtyli pars ea, quae huic annulo inſeritur, pari cura poliri debet; idem vero hoc brachium CG continuetur in linea recta vsque ad K, vt HK ſit longitudinis circiter 2 pedum, ſed in loco aliquo intermedio I habeat pondus plumbeum affixum, quod paruum quidem erit, ſed efficiet tamen vt vexillo hoc cuſpidi prius memoratae in F impoſito, et ſtylo per annulum H tranſeunte, partes machinalae vtrinque axi aut ſtylo F H adiacentes in exacto ſint aequilibrio, ita vt nullum adſit impedimentum, quo minus etiam leuiſſime ſpirans

 ventus

ventus vexillo huic ſuam directionem imprimat; quam directionem cum cuſpis HK indicare debeat, curandum maxime eſt, vt recta haec HK exactiſſime in directum iaceat cum plano CDAB. Vtrumque vero hoc brachium connectitur virga orichalcina transuerſa EG, ad maiorem toti vexillo firmitatem conciliandam. Quotiescunque igitur obſeruatio venti capienda eſt, imponatur hoc vexillum cuſpidi ſtyli in meridiana fixi, extra hunc vſum in loco ſicco cuſtodiendum, ne ſtyli acies nimis cito, continua affrictione, atteratur et obtuſa fiat; atque ſic directio venti accurate, et ad hoc negotium aptiſſime, poterit determinari.

§. 13. Requirunt vero haec omnia curam et cognitionem haud vulgarem; quare conſilium meum eſt, vt primum apud nos Petroburgi in tecto domus alicuius, in ſcopum hunc ſelectae, ope fabri cuiusdam lignarii ordinarii et communis, ſub inſpectione Academiae Scientiarum, et tale tabulatum quale in §. 10. memoraui, conſtruatur, et omnia reliqua quae indicaui in eo efficiantur. Hoc enim obtento, quoniam omnes inexpectatae circumſtantiae praeuideri nequeunt, facile erit defectus corrigere; atque praeterea talis faber hoc exercitio optime diſcet, quae ad ſimilia in vrbibus reliquis obſeruatoria aedificanda obſeruanda ſint; vt praeteream, hoc poſtea obſeruatorium illud ipſum futurum eſſe, quocum Petropoli obſeruationes correſpondentes inſtitui debent. Sed praeparationibus his Petropoli abſolutis neceſſarium erit eundem fabrum lignarium vna cum Academicorum aliquo in omnes vrbes allegatas mittere, vt ſub huius attentione et iuſſu ille ſimilia obſeruatoria, vbicunque conſultum id viſum fuerit conſtruat

et

et aedificet ; atque ſimul poſt aedificatum obſeruatorium Academicus obſeruatorem futurum inſtruat et exerceat in obſeruationibus, et hac et reliquis, probe et exacte inſtituendis.

§. 14. Quoniam vero Expetimentis hucusque inſtitutis, et obſeruationibus captis, ſatis innotuit, ventos non omnes horizontali motu progredi, ſed eos quandoque ex loco ſublimiori deorſum, vel ex loco profundiori ſurſum, ferri ; quod phaenomenon ventorum vocabo eorundem inclinationem ; hinc neceſſe eſt, vt obſeruatori ventorum ad manus ſit aliud inſtrumentum, quod vti prius Directorium vocari poteſt, inclinatorii nomine appellabo. Hoc inſtrumentum aeque facile ac reliqua ſequenti modo conſtruitur. Agglutinetur parallelogrammo ligneo ABCD, Tab. IV. fig. 5. eiusdem magnitudinis cum praecedente vexillo, vtrinque charta, atque hoc vexillum horizontale ABCD liberrime mobile ſit circa axem BC, qui incumbat duobus fulcris BH et CI ; circa medium axis E exeat virga ferrea tenuis EF, eius longitudinis, vt ipſa in F cuſpidata, aequilibrium ſeruet cum ABCD. Pondus aliud virgae EF, quam quod ipſa tenet, annectendum eſſe non ſuadeo, ne ventus in illud quoque irruat, et obſeruationes turbet. Hoc inſtrumento vento expoſito, et in ſitum horizontalem redacto ope perpendiculi GK, quod pedum alterutri annexum ſit, ſi adiunctus ſit ipſi ad latus arcus circularis LM, qui 150 circiter gradus comprehendat, obſeruari poterit commode venti inclinatio, ex notatis gradibus, qui in modo dicto arcu numerari poterunt, atque annotari, an directio venti ſurſum vel deorſum inclinata fuerit. Vt ne vero inclinatio ventorum ab ipſo tecto, in quo obſeruatorium aedificatum eſt, mutetur ; iubet neceſſitas, vt tabulata

bulata in §. 10. deſcripta, paulo altius ſupra tectum ipſum attollantur.

§. 15. Cum praeterea etiam multiplici experientia conſtet, ventos in ſuperiori aëris regione regnantes habere directionem diuerſam ab ea, quae in ventis inferioribus obſeruatur: neceſſe erit, vt obſeruator ventorum ex nubium, ſi quae adſint, ductu de ventis his ſuperioribus aeſtimatione iudicet, et quamnam plagam ſequantur annotet. Ex nullo enim alio indicio horum ventorum ſuperiorum directio capi poteſt.

§. 16. Quod ad alterum pertinet, nempe ad vim et violentiam ventorum, ea dependet a celeritate aëris moti, et cognoſcitur diſtincte, ſi ſciatur quotnam pedes ventus aliquis in tempore vnius minuti ſecundi abſoluat horizontaliter. Hoc obſeruari poteſt facillime et ſimpliciſſime ope ſequentis inſtrumenti, quod Anemometrum vocatur. Obſeruetur enim ad quamnam altitudinem in annexo quadrante DE a vi venti attollatur aſſerculus ABCD, circa axem AB perfecte mobilis, et cuius pondus antea examinatum fuit, atque gradus obſeruatae altitudinis annotentur in Diario; poterit deinde ex his obſeruatis calculo deduci, quamnam ea tempeſtate celeritatem ventus habuerit.

Tab. IV. fig. 6.

§. 17. Sunt hae hucusque expoſitae qualitates ventorum tales, ad quas praecipue reſpici ſolet, et de quibus ſperare licet, eas legitime et recte obſeruatas leges periodicas ventorum tandem prodituras eſſe. Quoniam vero et aliae adhuc ventorum affectiones ſunt, non inutiles, et eadem opera cum praecedentibus obſeruandae: poterit obſeruator tenere Thermometrum, vt eius ope de calore

calore aut frigore venti iudicare liceat. Hic neceſſe quidem eſſet, vt Thermometrum vento ipſi quauis vice exponeretur, et gradus huius calori et frigori reſpondens annotaretur: ſed quoniam hoc nonnunquam lucente ſole fieri deberet, cuius calor obſeruationem de calore venti irritam redderet, conſultius eſt, vt Thermometrum fixum in loco aliquo ſuſpenſum maneat, qui aëri libero et ventis peruius ſit, ſed ab omni ſole tutus, quod facile fieri poteſt; atque ſic certum ſemper indicium haberi poterit de calore aut frigore per quemcunque ventum aduecto, et cum illo aëre, qui Thermometro circumfluus eſt, ſtatim communicato.

§. 18. Cum deinde certum ſit, magnam inter aëris agitationes et Barometri mutationes dari connexionem: neceſſarium quoque erit Barometri rationem tenere, atque eius gradum in quauis ventorum obſeruatione annotare; cuius Barometri locus fixus ibidem eſſe poteſt, vbi Thermometrum aſſeruatur.

§. 19. Vt denique etiam ſciatur, quamnam humiditatis aut ſiccitatis mutationem ventus quisque produxerit: adhibenda erunt Hygrometra, et eorum in eodem cum Barometro et Thermometro loco poſitorum obſeruationes ſolicite etiam faciendae.

§. 20. De obſeruatore tandem ipſo hoc adhuc monendum eſt, requiri omnino, vt is inſtrumentorum ſuorum cognitionem et conſtructionem probe teneat, quo eodem mutationes, atque exinde hauriendas obſeruationes, recte inſtituere poſſit. Hinc antequam talis aliquis obſeruatorio ſuo admoueatur, neceſſario antea exercendus erit a perito quodam in omnibus et ſingulis expoſitarum obſeruationum faciendis, donec methodum haec omnia perſequendi accurate didicerit.

DISSERTATIO DE MACHINIS SIMPLICIBVS,

AVCTORE
Georg. Wolffg. Krafft.

§. 1.

Tabula V. In Mechanicis generaliter vocatur *Potentia* omne id, quod, cuicunque obiecto applicatum, motum in illo producere, aut vero ſi motus iam adfuerit, eum immutare et alterare valet. Ex actione igitur Potentiarum in obiectum aliquod oritur aut *Motus*, cum nempe vna potentiarum applicatarum reliquas ſuperat; aut vero *Aequilibrium* ſiue *Quies*, cum nulla potentiarum applicatarum reliquas vincere poteſt, ſed cuiuslibet actio ab actionibus reliquarum impeditur. De illo, Motu ſcilicet, agitur in *Mechanica* ſtricte ſic dicta; de hoc vero, Aequilibrio nempe aut Quiete tractatur in *Statica* vel *Geoſtatica*, quemadmodum quibusdam hanc ſcientiam, ad diſtinguendam eam ab *Hydroſtatica*, vocare placuit. Mallem vero dici, Staticam agere de aequilibrio potentiarum, quam de quiete ſimpliciter. Quies enim potius dicitur de obiecto motu carente ob hanc rationem, quia nulla plane potentia in illud agit; obiecta autem in Statica tanquam a potentiis, quanquam impeditis inter ſe, affecta conſiderantur, quae potentiarum inter ſe impeditio vocatur Aequilibrium. Obiectis itaque in Statica conſideratis po-

tius

tius conuenit aequilibrium quam quies ; quamuis hanc diſtinctionem non adeo magni momenti eſſe lubens confitear.

§. 2. Praecipuam Staticae tractationem abſoluunt *Machinae* ſic dictae *ſimplices* , vel *Potentiae Mechanicae* , quae in conſtructionem machinarum compoſitarum omnium ingrediuntur , ita vt harum quaſi Elementa dici poſſint. Quamuis autem hae machinae ſimplices , humanam quippe audaciam mire iuuantes , iam ab antiquis temporibus fuerint admodum excultae , et recentiori hac aetate vſu quotidiano praecipue eniteſcant : duo tamen ſunt, quae deſideranda in iis , meo quidem iudicio , videri poſſunt.

§. 3. Primum eſt , quod diuiſio et enumeratio earum ab antiquis tradita hucusque retineatur , neglecta tamen ea ratione , qua a priori , ſolo ratiocinio , inueniri potuiſſent ; vnde fit vt tenebris neſcio quibusdam obfundantur , neque enumeratio earum perfecta , demonſtrationibus ex Statica petitis , hucusque inſtitui poſſit , vti Geometria ex gr. elegantiſſime hoc praeſtat circa quinque corpora regularia. Statuit quidem Vitruuius Architect. libro X. cap. 1. homines antiquiſſimos a motu planetarum, praecipue Solis et Lunae , qui in oculos eorum incurrit, occaſionem arripuiſſe , machinas inueniendi, arrepta nimirum exinde idea motus circularis , cuius virtuti Ariſtoteles omnem Staticae facultatem attribuit. Sed nimis remota et difficilis haec cauſa eſt ; et potius credi debet ſola experientia fortuita adiutos primos homines , quod praecipue circa vectem vulgarem contingere potuit , in cognitionem machinarum ſenſim ſenſimque veniſſe , atque tum hanc doctrinam vtilitati et commoditati generis humani mirum in modum fauentem ſubinde vlterius excoluiſſe.

§. 4. Alterum, quod machinarum ſimplicium tractationi adhuc deeſſe video, eſt particularis atque exacta deſcriptio regularum Cunei, qui pro vltima harum machinarum ordinarie habetur, et cuius naturam alii in Vecte, alii in plano inclinato quaerunt, diuerſiſſimasque exinde rationes potentiae ad onus, vel reſiſtentiam ſuperandam, in ſtatu aequilibrii eius, protrahunt. Cauſa huius confuſionis nulla alia videtur eſſe, quam quod ab Authoribus, qui de eo ſcripſerunt, non primum in abſtracto, ad ſimilitudinem vectis, conſideratus, et deinde demum, legitima cautione adhibita, ad findenda ligna, et alias corporum circumſtantias, applicatus fuerit; ita vt elegans et ſimpliciſſima haec machina, in ſolas mercenariorum et baiulorum manus quaſi detruſa, neſcio quo mucore obducta et contemptu neglecta iaceat. His duobus deſideratis itaque praeſenti ſcripto lucis quantum potero affundere conabor.

§. 5. In potentiarum, obiecto cuidam applicatarum, aequilibrio, quotiescunque accidit vt potentia vnica minor cum altera vnica maiore aequilibrium ſeruet, vocatur illud obiectum *Machina*, et quidem *Machina ſimplex*, ſi obiectum illud ſit vnicum. Potentiarum vero huic machinae applicatarum minor more conſueto votatur *Vis*, maior autem *Onus*. Vitruuius l. c. definit machinam, quod ſit collectio materiae bene iunctae, cuius ope grauiſſima onera leuari poſſunt; ſed, optime notante Perralto in notis Verſioni eius Gallicae ſubiunctis, materiae cuiuscunque conſideratio exulare debet ex conſideratione machinarum, praecipue ſimplicium. Obiecta igitur, quibus potentiae noſtrae debent applicari, exuta ſint oportet ab omni materia;

teria; extenſa tamen plerumque debent eſſe, vt in diuerſis eorum locis potentias queant recipere. Erunt igitur extenſa omni materia deſtituta, hoc eſt, quantitates Geometricae, lineae nempe ſuperficies et corpora Geometrica, non excluſo etiam puncto.

§. 6. His obiectis Geometricis applicari poteſt poteutia vel vna; quae vero cum motum neceſſario directioni ſuae conuenientem producat, Machinae inueniendae, quippe quae aequilibrium requirit, inutilis plane erit. Poſſunt porro adhiberi potentiae duae; ſed de his notum eſt ex Staticis, quod aequilibrium gignere non poſſint, niſi ſint in directum contrariae et aequales. Ceſſat igitur in his illa machinarum proprietas, qua requiritur, vt vna potentiarum applicatarum ſit altera minor; neque igitur ex duabus potentiis Machinae inuentio ſperari poteſt. Poſſunt vlterius adhiberi potentiae tres, de quibus notum eſt ex Staticis, eas, quamuis inaequales, ita temperari et accommodari tamen poſſe, vt ſub diuerſa magnitudine et intenſione earum aequilibrium nihilominus ſeruent. Itaque trium potentiarum conſideratio machinae inueniendae poterit inſeruire. Poſſunt inſuper plures quam tres potentiae obiectis applicari; ſed iterum notum eſt ex Staticis quod, pluribus potentiis in eodem plano eidem obiecto applicatis, ſubſtitui poſſit ſemper vnica duabus quibusuis aequiualens; poterit itaque applicatio plurium potentiarum ſemper reduci ad illum caſum, quo earum tres tantum adſunt, vt itaque huic ſoli caſui potentiarum trium debeamus inſiſtere, et videre, quid machinarum exinde ſequatur.

§. 7. Cum vero naturaliter impoſſibile ſit, vt in quocunque obiecto, duabus potentiis inaequalibus applicatis, maior minorem non vincat et ſecum abripiat, ſed aequilibrium efficiat: hoc tamen in machinis requiratur, et actu ipſo etiam fiat; neceſſe eſt, vt aliquid cauſae hic ſubſit, cur hoc fiat. Inuenitur autem facili opera duplex huius rei, quae tamen vnice admirationem noſtram circa machinas excitat, cauſa. Prima eſt *Deſtructio* partialium quarundam virium in potentiis applicatis, cum Statica nos doceat, duas vires contrarie nitentes ſe inuicem quaſi deſtruere et tollere. Altera vocari poteſt *Abſorptio*, cum nempe potentiarum trium adhibitarum aliqua aut ex toto, aut ex parte, ab obiecto firmiſſimo quaſi abſorbetur, et in hoc tranſit, ita tamen, vt propter huius obiecti vim inertiae motum in eo excitare localem non poſſit. Quae duae cauſae, cum in occulto adſint machinis, et latenter agant, omne id conſtituunt, quod inexpertos in admirationem rapit. Quomodo vero vtraque haec cauſarum allegatarum agat, diſtinctius patebit ex ſequentibus.

§. 8. His praemiſſis ſolui poterit ſequens problema Staticum, *inuenire omnes machinas ſimplices poſſibiles.* Requiritur enim tantum, vt tres potentiae ſeſe aequilibrantes applicatae conſiderentur primum puncto, dein ſucceſſiue lineae, ſuperficiei, et corpori, Geometrico ſenſu intellectis; quo facto opera detur, vt aliqua harum potentiarum, aut partes quaedam earum, in ſelectum ad hunc finem obiectum occulte agant, vel per *Deſtructionem*, vel per *Abſorptionem*; habebitur hoc modo machina, quam obiectum ad hunc finem ſelectum ſiſtet; eaque ſimplex, ſi obiectum ſelectum fuerit vnicum tantum.

§. 9.

§. 9. Circa potentias quidem corpori Geometrico applicatas notandum eſt, iis, niſi in eodem ſint plano, aequiualentem, hoc eſt vnicam et ſolam quae omnem plane motum a potentiis impreſſum impediat et ſiſtat, dari non poſſe, quod in Staticis demonſtratur. Tribus igitur potentiis tali corpori applicatis, quae non in eodem plano ſunt, nullum aequilibrium poteſt, obtineri, itaque nec machina exinde inueniri. Niſi enim omnes tres potentiae fuerint in eodem plano, corpus tamdiu modo huc modo illuc iuxta directionem potentiae fortioris ſemper rotabitur, donec eae veniant in vnum idemque planum. Si vero potentiae dictae ſint in eodem plano, idem eſt, ac ſi ſuperficiei vnicae lateribus applicatae eſſent; ex quo fit, vt tria tantum habeamus obiectorum genera quae machinis ſimplicibus producendis ſunt apta, punctum nempe, *lineam* et *ſuperficiem*. Sed excludi quoque debet punctum, vtpote quod extenſione omni, quae in machina tamen neceſſario requiritur, plane caret.

§. 10. Applicemus ergo nunc tres potentias primum lineae rectae A B. Harum potentiarum duae ſint expreſſae per A H et B K, quae duae rectae et intenſitatem et directionem potentiarum deſignent. Notum eſt ex ſtaticis, ſi producantur HA et KB vsque dum ſe ſecuerint in D, factisque DE = HA, et DG = BK, Diagonalem DF parallelogrammi DEFG repraeſentare directionem et magnitudinem tertiae cuiusdam potentiae CI, quae actionibus priorum duarum AH et BK ſola aequipollet; vt itaque, hac tertia in directione CD applicata, linea recta AB futura ſit in aequilibrio. Erit autem demiſſis ex puncto C perpendicularibus CL et CM in Tab. V. fig. 2.

conti-

continuatas directiones AD et BD, poſitoque ſinu toto $=$ 1, in Triangulo ALC analogia 1 : AC $=$ ſin. HAC : LC, vnde LC $=$ AC. ſin. HAC. Deinde Triangulo BMC dabitur proportio 1 : BC $=$ ſin. KBC : CM, vnde CM $=$ BC. ſin. KBC. His poſitis erit BK : AH $=$ DG : DE $=$ EF : DE $=$ ſin. EDF : ſin. EFD $=$ ſin. EDF : ſin. FDG $= \frac{LC}{DC} : \frac{CM}{DC} =$ LC : CM $=$ AC. ſin. HAC : BC. ſin. KBC. Ex quo fundamento leuiſſimo negotio prodit machina ſimplex *Vectis* dicta. Nam ſi alterutram trium harum potentiarum in ſuppoſitum aliquod obſtaculum immobile per Abſorptionem tranſire concipias: habebis totidem Vectis ſpecies. Tres potentiae AH, BK, et CI, ſunt in aequilibrio, ſi nempe CI agat iuxta directionem CD; vel duabus praecedentibus aequipollet in omnibus vnica CI; ſi ergo haec vnica impeditur; etiam duae priores impediuntur, hoc eſt, aequilibrium ſeruant. Impeditur vero aequipollens CI ſubiecto fulcro firmiſſimo, quod Hypomochlium dicitur; ergo habebitur hinc Vectis ſpecies quae *Heterodromus* dicitur, et in quo generaliter eſt Vis BK ad Onus AH $=$ AH. ſin. AHC : BK. ſin. CBK. ſi vero abſcondatur vel abſorbeatur extremarum potentiarum alterutra, ex. gr. AH, notum eſt ex ſtaticis, eſſe pro aequilibrio BK : CI $=$ AC. ſin. ACI : AB. ſin. ABK; ex quo fit Vectis ſecunda ſpecies, quae *Homodromus* vocatur. Duae hae ſpecies Vectis Heterodromi et Homodromi vi minori onus maius in aequilibrio tenent, quae Energia ex eo ſolo proficiſcitur, quod potentiarum vna hypomochlii ope abſorbeatur quaſi, et abſcondatur, quam facultatis in hac machina cauſam apud ſolum de la Hire, Traité de Mecanique pag. 38. obſeruatam inueni. In vecte Homodromo concipi etiam poteſt, vim

vim medium locum inter onus et fulcrum occupare, quam tertiam Vectis ſpeciem aliqui appellant; at vero cum ſic diſpoſitus vim onere maiorem requirat: e machinarum ſimplicium numero excludi debet haec tertia ſpecies, vnde factum quoque eſt, vt nullo peculiari nomine inſigniatur, quamuis vtiliter in quibusdam caſibus, vbi virium copia adeſt, ad celeritatem augendam adhiberi poſſit.

§. 11. Inuento ſic ſemel Vecte, ingenio veterum debemus eiusdem varias emendationes. Cum enim hoc praecipuo incommodo Vectis laboret, quod deſinat habere energiam, quam primum ex ſitu horizontali verticalem nactus eſt: medelam huic malo attulerunt inueniendo *Trochleam*, quae nihil aliud eſt, niſi *Vectis* heterodromus aequalium brachiorum *perpetuus*, ex qua ſola quidem nihil virium lucramur, ſi centrum eius immobile ſit; ſi vero mobile fuerit, aut aliquot trochleae inter ſe coniungantur, multum eae vires augent, et reuocantur ad Vectem compoſitum. Obtenta ſic trochlea facile fuit inuenire *Axem in peritrochio*; nam cum Trochlea ſimplex vectis ſit aequalium brachiorum, qui vim oneri requirit aequalem: cogitatum fuit de Trochlea inaequalium brachiorum, quorum breuiori onus, longiori autem vis applicari poſſet, ex quo ortus fuit Axis in peritrochio, qui nihil aliud eſt quam Vectis perpetuus inaequalium brachiorum.

§. 12. Applicemus nunc tres potentias ſuperficiebus Geometricis, et quidem earum ſimpliciſſimae, nempe Triangulo. Poſſunt hic occurrere varii caſus. Aut enim potentiae omnes applicatae erunt vni lateri; aut duae earum tantum vni lateri, tertia alteri lateri; aut vero ſingulis lateribus applicatae erunt ſingulae potentiae. Primum ſi

acciderit: neceſſe eſt, vt omnes tres potentiae applicatae ſint vni eidemque puncto; quod ſi non fiat, Vectis redibit. Quae potentiae igitur, ſi vni puncto ſint applicatae, poterunt earum duae componi in vnam, quam Fig. 2. repraeſentabo per rectam EF, quae ſola duarum aliarum non expreſſarum ſit aequiualens. Reſoluatur haec EF in duas EG et EH, quarum illa ſit perpendicularis in latus Trianguli AB, et haec cum latere AB coincidat: euidens eſt, ſi Triangulum fiirmum ſit et immobile potentiarum aliquam partem, nempe EG abſorberi a firmitate obſtaculi huius immobilis, et conſequenter ad producendum aequilibrium inter tres has potentias requiri vnicam quae ſit expreſſa per EL, et aequalis ipſi EH, hoc eſt minor quam EF. Non minus autem patet quoque, ſi in continuata GE capiatur EI minor quam EG, atque ex EL exque hac EI componatur noua EK: fore vt etiam haec EK aequilibrium ſeruet cum duabus EF, ſed non eo compendio quod ante fuit, cum iam EK ſit maior quam EL, neque latus AB omne id quod fieri poteſt abſorbeat. Vocatis igitur $EF = p$, et $EK = q$, erit in triangulo rectangulo EHF, ſinus totus $(1) : EF\ (p) = \text{coſ.}\, HEF : HE$ vnde $HE = p$ coſ. HEF; eodem modo eruitur in triangulo rectangulo ELK, ſinus totus $(1) : EK\ (q) = \text{coſ.}\, KEL : EL$ vnde $EL = q$. Coſ. KEL; cum itaque pro Onere, dabitur analogia $V : O =$ coſ. HEF: coſ. EH et EL ſint inter ſe aequales; ponendum erit p. Coſ. HEF $=$ q. Coſ. KEL, vel ſi q accipiatur pro Vi, et p requiratur, ſvt ad aequilibrium efficiendum ſolae KEL; vel demiſſa perpendiculari AD in latus BC, erit $V : O = \frac{BD}{AB}$: coſ. KEL $=$ BD : AB. coſ. KEL, ſi AD ducta accipiatur pro linea horizon-

rizontali, et EF ad hanc perpendicularis, vt directionem grauis naturaliter cadentis exprimat. Apparet igitur ex hac applicatione trium potentiarum oriri machinam ſimplicem, quae *Planum inclinatum* ordinarie vocatur, vnde ſimul patet, planum hoc inclinatum optimo iure machinis ſimplicibus adnumerari. Energiam vero ſuam accipit ab abſorptione, dum pars aliqua ponderis abſoluti, nempe E G, intra planum abſorbetur ab eius firmitate.

§. 13. Cum machinae ſimplices maxime ad eleuanda onera ingentia in vſum vocentur: ſine dubio prima praxis cum plano inclinato inſtituta docuit, hypothenuſam eius longitudinem talem requirere, quae vel difficulter vel plane non dari poſſit, ſi onus ad mediocrem altitudinem ſit eleuandum. Huic incommodo medelam attulit ingenium primaeuorum, dum talé planum cylindro circumuolutum imaginati ſunt, ex quo planum inclinatum idem aliam formam accipit, et *Cochlea* vocatur; idem enim praeſtant ſulci ſpirales, quibus cochleae ordinariae exarantur, quod efficeret planum inclinatum cylindro circumuolutum, ſed illud commodi lucramur in cochlea, quod et multo minus ſpatium occupet, et facilius parari poſſit. Cum itaque Cochlea nitatur eodem fundamento quo planum inclinatum, et ex §. 12 facile intelligatur, Vectis et plani inclinati naturas nimis eſſe diuerſas, quam vt vnam ex altera deriuare liceat: patet recte aſſertum eſſe a *Dechales*, mundi Mathem. Mechan. lib. 1. p. 397, Cochleam ad Vectem reuocari non poſſe.

§. 14. Si caſuum enumeratorum contingat ſecundus, vt nempe duae potentiae vrgeant vnum latus, et tertia ſola alterum: poterit duarum in vnum latus directarum actio componi in vnam ſolam potentiam, vt ita vnicui-

 que

que horum duorum laterum vna ſola vis ſit applicata. Quo facto, cum tertia potentia abſit quae his duabus aequilibrium inferre poſſit: nihil aderit, quod triangulum hoc modo a potentiis ſolicitatum vel a motu progreſſiuo, vel a motu rotatorio, liberet; quare hoc caſu impoſſibile erit obtinere machinam ſimplicem.

§. 15. In caſu autem tertio, qui nempe ſingulis lateribus ſingulas applicatas exhibet potentias, ſint duobus
Fig. 3. lateribus CA et CB applicatae potentiae qualescunque FG et DE, quae reſoluantur in binas FH et FI, nec non DM et DN, quarum FH et DN ſint in ipſis lateribus Trianguli; FI autem et DM ſint ad haec perpendiculares. Euidens eſt, duas potentias FH et DN nullum effectum edituras eſſe in ipſum triangulum; ipſas vero FI et DM hoc perpendiculariter ad latera eſſe ſolicitaturas. Reſoluantur hae denuo in binas FK, FL, et DP, DO, quarum FK et DP ſint verticales, FL et DO autem horizontales. Niſi iam horizontales FL et DO ſint in eadem horizontali, atque inter ſe aequales, vt vna alteram per *Deſtructionem* tollat: non poterit triangulum vel a motu progreſſiuo, vel a motu rotatorio liberari, ſin itaque punctum F et D concipiantur in eadem horizontali, poteſt recta FD conſiderari vt Vectis, cuius extremis potentiae FK et DP applicatae ſunt; his tertia, in aequilibrio ipſas ſeruans, applicari deberet in earum centro, vel hypomochlio, ſi fuerint inaequales; quod cum caſus infinite multos pariat: ſimpliciſſimum erit, potentias FK et DP conſiderare aequales, ortas ex aequalibus FG et DE, in eadem horizontali, et ſub iisdem angulis AFG et BDE triangulo aequicruro ACB, cuius baſis AB horizontalis

quo-

quoque ſit, applicatis. Quo facto Machina ſimplex oritur, quae Cuneus dicitur, cuius ratio ex natura Vectis deducenda erit, cuius iam machinae ſimplicis leges erunt inueſtigandae.

§. 16. In his itaque circumſtantiis ſimpliciſſimis ſollicitetur triangulum aequicrurum ABC, et cuius latus AB horizontale ſit, a duabus potentiis aequalibus FG et DE, in eadem horizontali FD, et ſub iisdem angulis ad latera applicatis, eaeque reſoluantur in ſuas collaterales eo modo, vti paulo ante dictum fuit; quo facto duae potentiae FL et DO ſibi mutuo directe occurrentes et aequales ſeſe deſtruent, atque triangulum ABC a ſolis FK et DP, itidem aequalibus ſurſum vrgebitur verticaliter, quibus nunc tertia in medio ipſius AB opponenda venit ad ſeruandum aequilibrium. Sit haec tertia potentia RQ, cuius quantitas et relatio ad ipſas DP et FK ita definietur. Poſitis $DE = FG = p$, et ſinu toto $= 1$, erit in triangulo EMD, ſinus totus $(1) : ED\ (p) =$ ſinus $EDN : DM$, vnde $DM = p.$ ſin. EDN. Porro in triangulo MDP erit ſinus totus $(1) : MD\ (p.\ \text{ſin.}\ EDN) =$ ſin. DMP $\left(\frac{BR}{CB}\right)$: DP, hinc $DP = \frac{p \cdot BR \cdot \text{ſin.}\ EDN}{CB}$. Triangulum itaque ſurſum agitur, ob $FK = DP$, a potentia quae aequalis eſt $\frac{2p \cdot BR \cdot \text{ſin.}\ EDN}{CB}$, cui potentia tertia RQ etiam aequari debet. Sin itaque vires DE et FG ſimul agentes vocentur Onus, hoc eſt $O = 2p$, et vis RQ ſit vis, hoc eſt $V = RQ$, habebitur haec aequatio, $V.\ CB = O.\ BR.$ ſin. EDN, aut haec proportio, efficaciam Cunei declarans $V : O = BR.$ ſin. $EDN : CB$. Vnde patet, in Cuneo vim requiri onere minorem; ipſumque energiam ſuam accipere Fig. 4.

ex eo, quia duae potentiae partiales DO et FL ſeſe mutuo deſtruunt, et in firmitatem ipſius redundant; ipſum denique dependere a natura Vectis.

§. 17. Cum itaque appareat, angulum EDN, hoc eſt directionem potentiae DE ad latus, in computum et calculum efficaciae ingredi: patet ſimul, non vnam et ſolam huius machinae rationem quae vim inter et onus obtinet, dari poſſe, vti communiter ab Authoribus hoc fit, qui et ob id ipſum in diuerſas ſententias abeunt. Conſiderata igitur memorata hac directione, ponam primo coincidere ipſam DE cum latere trianguli CB; atque ſic erit ſin. EDN = o, emergetque proportio ſequens, V : O = o : CB, hoc eſt, vis nulla adeſſe debet ad aequilibrium obtinendum, quod per ſe patet. Secundo ponam, efficere DE angulum rectum cum latere CB, qui caſus obtinet, cum ligna huius machinae ope diffindenda veniunt; huius enim partes, ſeparatae iam aliquantum, iuxta arcum circuli, hoc eſt, in directione ad vtrumque latus CA et CB perpendiculari, cuneum vrgebunt, et ſeſe reſtituere conabuntur; atque erit iam ſin. EDN = 1, quare hoc caſu obtinebit proportio V : O = BR : CB. Tertio ponam, potentiam DE habere directionem in cuneum horizontalem, quo facto erit ſin. EDN = ſin. FDB = ſin. FDC = ſin. ABC = $\frac{RC}{CB}$, et dabitur proportio V : O = BR. RC : CB².

§. 18. Cum itaque laborauerint Authores vt Cuneum ad Vectem reuocent, de quo vid. Dechales in Mundo Math. Mechanices lib. 1. p. 397. patet ex allegatis, Cuneum eſſe quidem Vectem, ſed non talem qualem conſiderauit Ariſtoteles, qui ſtatuit; poſito corpore diffringendo ST

VX,

VX, et cuneo intruſo ACB, idem praeſtare cuneum, quod efficeret Vectis duplex A*a*C et B*b*C, primi generis quilibet, quorum hypomoclia ſint *a* et *b*, vires applicatae in A et B, onera vero vtrinque in C; eſſet enim hoc modo V : O = C*a* : *a*A, quod inuentae proportioni repugnat. Neque etiam verum attigit Guido Vbaldus, qui ſtatuit adeſſe duos Vectes ſecundi generis, quorum commune hypomochlium ſit C, vires applicatae in A et B, onera autem in *a* et *b*; nam iuxta haec placita eſſet V : O = *a*C : AC, quod iterum rationi inuentae contrarium eſt. Sed cuneus eſt Vectis primi generis FLD, cuius hypomochlium eſt in medio, et onera vtrinque in D et F ſunt applicata. Eſt autem huius Vectis haec natura, vt, manente ſemper eadem ratione inter Vim et Onus, brachia eius continuo fiant longiora, ſi cuneus percuſſione intrudatur; quo ipſo haec machina ſimplex corporibus diuellendis quam maxime eſt accommodata.

§. 19. Requireret nunc ordo huius tractationis vt conſiderarentur etiam tres potentiae figuris Geometricis multi lateris applicatae. Sed hac inquiſitione vlteriori opus non eſt, partim quia machinarum non niſi ſimplicium perfectam enumerationem inſtituere mihi propoſui, ad quas proinde non niſi figura etiam ſimpliciſſima, qualis Triangulum eſt, requiritur; partim vero etiam, ſi qua machina ad ſimplices proxime accedens ex figura multilatera, et potentiarum ad eam applicatione, ſperari poſſet, ea commode Cuneo accenſeretur. Prodeunt itaque Machinae ſimplices non niſi duae, *Vectis* ſcilicet, et *Planum Inclinatum*, ex eo deducuntur *Trochlea*, *Axis in peritrochio*, et *Cuneus*; ex hoc vero deriuatur *Cochlea*.

SPE-

SPECIMEN EMENDATIORIS THEORIAE ORDINVM ARCHITECTONICORVM

AVCTORE
Georgio Wolffg. Krafft.

§. 1.

Quamuis negari nequeat, ineſſe receptis atque ab antiquiſſimis temporibus ad nos perductis *Ordinibus Architectonicis* talem venuſtatem, et eiusmodi decus, quod diſtincte quidem vix exprimi poſſit, ſed in quo animus tamen ſpectatoris intelligentis plane acquieſcat, et placida quadam voluptate perfundatur; ita quidem, vt *Sturmius* putauerit *Doricum* et *Corinthium* Ordines ab ipſo Deo immediate fuiſſe hominibus reuelatos, cum eorum elegantia vires humanas plane ſuperare videatur, et reliqui Ordines non ſint niſi ad eorum imitationem expreſſi; *Vilalpandus* quoque conſuerit, *Capitula* columnis Templi Salomonis impoſita ab artifice *Hiram* Phoenicio, diuino inſtinctu, prout e ſacris conſtat, ad hoc aedificium exſtruendum praedito, originem deinceps dediſſe *Capitulo* Corinthio, cum vtriusque nationis huius mutuum iam eo tempore floruerit commercium; certum tamen eſt, Theoriam horum *Ordinum* ita tenebris adhuc eſſe inuolutam, vt, fatentibus ipſis celeberrimis Architectis, vix dici queat in quo character eſſentialis vnius cuiusque *Ordinis* conſiſtat, et quidnam illud ſit, quod quemlibet a reliquis omnibus diſtinguat.

§. 2.

§. 2. Hoc aſſertum vt eo magis fiat manifeſtum, conſideremus Definitiones quae in Architectorum ſcriptis *Ordinibus* tribuuntur. Audies hic *Dauillerium* dicentem, *Ordinem architectonicum confuſioni opponi*, *atque eſſe connexionem plurium membrorum iuxta regulas artis elaboratam eum in finem vt totum exinde reſultans aſpectui appareat iucundum.* Cum autem regulae generales, quarum iuſſu membra archetectonica connecti debent, non prohibeant, vt infinitis fere modis ea inter ſe combinentur: videtur certe ex hac Definitione inferri poſſe, infinite multos etiam dari diuerſos *Ordines*; cui vero illationi Authores reliqui plane refragantur, dum in quinario eorum numero fere omnes acquieſcunt, de ſexto Sturmiano adhuc ſub iudice lis eſt, de pluribus autem excogitandis omnes deſperant. Idem obiicere licet alteri huic Definitioni, *Ordo eſt ornatus architectonicus*, *conſtans Stylobata*, *Columna*, *et Trabeatione*; nihil enim ex ea deduci poteſt vnde vnam compoſitionem harum trium partium eſſentialium ab altera quadam earundem combinatione diſtinguere liceat. Melius mea opinione characterem intrinſecum *Ordinis architectonici* expreſſit *Perraltus* in praeclara illa traductione *Vitruuii*, in nota 1. Praefationi Libri IV. adiecta, vbi talem *Ordinem* ita definit, vt is ſit; *Regula proportionem columnarum exhibens*, *characteremque columnae*, *et figuras membrorum eam ingredientium*, *exprimens*; neque quicquam in hac Definitione deſiderari poſſet, ſi has regulas, earumque fundamenta ſtabilia, et characteres cuiusque columnae, diſtinctius tradidiſſet; quod vnicum adhuc ſcientificae huius negotii doctrinae deeſſe videtur.

§. 3. Quodſi deinde notas characteriſticas *Ordinum* ab Auctoribus allegatas ſpecialius perluſtremus, deprehendimus, in *Tuſcano* capitulum et volutis et cymatio carere, Zophorum vel nudum eſſe, vel antepagmentis tantum ornari debere; in *Dorico* capitulum volutis itidem carere, ſed cymatia admittere, Zophorum vero triglyphis et guttis diſtingui; in *Ionico* volutas adeſſe octo, ſed folia abeſſe; in *Corinthio* volutas ſedecim cum tribus foliorum ſeriebus comparere, in *Romano* denique octo tantum volutas et duas foliorum ſeries conſpici. In his autem, ſi vel maxime differentia ſpecifica columnarum in eiusmodi extrinſecis et accidentibus tantum quaeri poſſit, iterum ita variant Auctores, vt fere nulli eorum cum alio conſtet. Ita ex. gr. quidam in Ordine *Tuſcano* cymatium admittunt; Ordinis *Dorici* inueniuntur columnae, antiquitus conſtructae, ſed triglyphis et metopis deſtitutae, teſte *Dauillerio* pag. 15. Ordini *Ionico* quidam *del Duca* Italus vnam foliorum ſeriem addidit; *Romano* Franciſc. *Borromini* ſedecim volutas tribuit. Ita porro, cum *Tuſcanus* ſimpliciſſimus omnium debeat eſſe, nec niſi aedificiis rudioribus tribui, videmus tamen eundem admoueri interdum palatiis cultiſſimis et ſplendidiſſimis. Quae omnia abunde docent, intrinſecum *Ordinis* alicuius characterem in eiusmodi circumſtantiis peregrinis quaerendum minime eſſe.

§. 4. Ad haec accedunt quoque ſequentia adhuc, quod nempe neque in proportionibus partium eſſentialium inter celeberrimos Architectos conueniat. Ita ex. gr. *Palladius* omnium Ordinum ſtylobatis aſſignat partem quartam altitudinis columnae, quintam vero trabeationi; *Vignolus* vero,

vero, aliter ſentiens, conſtanter tribuit columnae partem tertiam ſtylobatae, quartam trabeationi. *Vitruuius* lib. IV. cap. 7. *Tuſcanae* columnae altitudini ſeptem aſſignat modulos, *Serlius* vero eidem non plures concedit quam ſex. In Gallia quidam nouo ſe *Ordine* Architecturam ditaſſe cenſuit, cum integrum ſcapum foliis veſtiret, loco volutarum ab antiquis receptarum gallos gallinaceos poneret, atque vbique liliorum folia interſpergeret. Fatentur denique omnes, Ordinem *Romanum* non eſſe niſi compoſitum ex *Ionico* et *Corinthio*, ex qua ratione etiam ſub titulum *Compoſiti* venit; et ſextus Ordo a *Sturmio* excogitatus honorem ſibi ex hoc ſolo tueri conatur, quod *Ionici* ſit aemulus, eodem modo, quo *Doricus*, *Tuſcanum*, *Corinthius Romanum* aliquantum refert. Ita igitur animus inter varias Architectorum ſententias fluctuans modo huc modo illuc agitur, neque quicquam inuenit in quo acquiеſcere et verum tenere poſſit.

§. 5. Haec omnia ſolicite perpendens incidi tandem in eam ſententiam, vt putem duos ſtatuendos eſſe *Ordinum architectonicorum* quorumcunque characteres eſſentiales, quorum ope quam diſtinctiſſime illi inter ſe ſeparari, atque omnis confuſio euitari poſſit. Horum characterum vnum ſtatuo *Hiſtoricum*, *Externum*, auctoritate ſola gentium ſtabilitum et introductum, ad quem ſolum Architecti hucusque reſpexerunt, alterum vero mox memorandum plane deſeruerunt. Huc refero ex. gr. columnas *Caryatides* dictas, *Volutas* et *folia acanthina*, cum *cauliculis*, *Strias* ſcapis induci ſolitas, et alia quaedam, quorum origo hiſtorica ex Architectorum libris abunde conſtat, et quae tamen, etiamſi peregrina in hoc negotio

ſint, omnino tamen excludi non debent, ſed nec vnice ad conſtituendum criterium operum tam nobilium concurrere. Pro altero horum characterum aſſumo *Philoſophicum*, *Internum*, ex natura intima humanae mentis petitum, qui in proportionibus et earum perceptione, ſenſibus haurienda, conſiſtit. In quam rem egregie loquitur *Vignolus*, curioſus antiquitatum architectonicarum ſcrutator, affirmans, ſe obſeruaſſe, quod in columnis antiquitus conſtructis ex membris etiam minimis maxima omnia liceat dimetiri, hoc eſt, quod membra minima et maxima omnia inter ſe facile, ope proportionis comparari poſſint. Quod igitur Architecti, cognitionis philoſophicae, plerumque ignari confuſae tantum perceptionis ope pulchrum deprehenderunt: id ope Matheſeos rectificandum et confirmandum, ſed ſimul ſuis limitibus circumſcribendum eſt, eo plane modo, quo in Muſica citius harmoniae quaedam auditui gratae inuentae, quam earum rationes in proportionibus deliteſcentes a *Pythagora* demum detectae fuerunt, et noſtra aetate extra omne dubium poſitae tenentur.

§ 6. Eſt enim omnino etiam Architectura bene conſtituta quaedam quaſi Muſica, et palatium decore ſuo ſe commendans nihil aliud quam cantio, aut congeries harmoniarum oculo ſpectatoris intelligentis ſeſe ſimul ſiſtentium, veluti in cantione auribus accommodata illae ſe ſucceſſiue monſtrant. Natura mentis humanae ita comparata eſt, vt proportionibus facile percipiendis maxime delectetur; quae ſi a ſola ratione detegi debeant, neque alium effectum quam in animam hominis et eius facultatem rationalem edant, non placent niſi in his rebus exercitatis, et harum proportionum gnaris; cuius rei ex-

emplum

emplum apertiſſimum habere poſſumus in ſerie aliqua numerorum certas leges tenente et chartae inſcripta, quae certe legis huius ignarum non afficit, ſed gnarum voluptate perfundit. Si vero proportiones, numeris primum expreſſae tantum, deinde aut motu aliquo magis niteſcant, vt cum *Keplero* loquar, aut vero ſimultaneitate rerum corporearum in iſta proportione exiſtentium perdureſcant, atque ſic per organa mentis ſenſitiua animo illabantur: tum vero etiam proportionum inſcientibus placent; prout illud quotidie obſeruare licet in hominibus rudi ingenio praeditis, in quibus aliquae ſaltim harmoniae muſicae laetitiam excitant. In quo quidem genere Architectura Muſicae adhuc multum praeferenda videtur, cum illius opera non ſoli delectationi ſed etiam vſui maxime neceſſario deſtinata ſint, et longo tempore perdurent; huius vero effectus, etiamſi variis vicibus repeti poſſint, cito tamen tranſeant, neque aeque diuturnum vt illa animo alimentum praebeant.

§. 7. Incipiam autem a characterum modo indicatorum altero, qui in proportione partium columnae conſiſtit, atque verum criterium nobis pandit, quo *Ordines architectonici* inter ſe poſſunt diſtingui. Suppono igitur, proportiones partium in quacunque columna ita comparatas eſſe debere, vt primo facile poſſint viſu percipi quod generale omnium Architectorum praeceptum eſt; deinde ſecundo, vt in quolibet Ordine imperium teneat determinatus tantum, non vero quilibet promiſcuus proportionum numerus. Cum igitur ex Arithmeticis notum ſit, numerum quemlibet compoſitum poſſe reſolui in determinatum numerum ſuorum factorum ſimplicium et primorum, atque hos primos numeros deinde omnifariam inter ſe com-

 binatos

binatos varias ſiſtere proportiones; conſtitui me cum tentare, quid ex numeris ſimpliciſſime compoſitis, atque eorum ita combinatis diuiſoribus primis, in *Ordines architectonicos* influere poſſit.

§. 8. Sequor autem in his fere methodum Clariſſimi *Euleri* noſtri, qui in Egregio Opere, quod nuperrime ſub titulo: *Tentamen nouae Theoriae Muſicae*, publice prodiit, ſonos omnes, qui in cognitis hucusque Generibus Muſicis recepti fuerunt, ex aſſumto quodam numero compoſito, et eius factoribus ſimplicibus, ingenioſiſſime eruit; atque ex. gr. ex numeri compoſiti 3^2, eiusque diuiſoribus 1, 3, 9, Genus Muſicum a Mercurio quondam inuentum et Tetrachordo expreſſum; ex numeri compoſiti 3^3, 5^2, eiusque diuiſoribus ſimplicibus Genus Muſicum Diatonico Chromaticum hodie vſitatum, ad amuſſim deducit. Quemadmodum ergo ibi numerus compoſitus aſſumtus *Exponens Generis Muſici* ex eo prodeuntis vocatur: ita hic ego ſimilem numerum compoſitum aſſumam, quem Ordinis architectonici ex eo deriuati *Canonem* appellabo.

§. 9. Cum igitur in qualibet columna quatuor partes principales veniant conſiderandae, nimirum 1. Modulus, 2. Stylobata, 3. Columna, et 4. Trabeatio: ſelegi tales numeros compoſitos, qui primo ſint maxime ſimplices quia ſimplicitas in hoc negotio maxime placet, et deinde qui non in plures quam quatuor diuiſores poſſint diſcerpi, vt nempe proportiones inde eruendae ex vno aliquo *Canone* deriuentur, atque vt ſimul hoc Canone proportionum in aliqua columna adhibendarum numerus exhauriatur, neque aliqua ſuperſit aut deficiat. Vti ex. gr. ſi capiatur numerus

merus compoſitus 2, 3, conſtans ex duobus numeris primis: habet is diuiſores ſequentes, 1, 2, 3, et 6, vnde non plures erui poſſunt proportiones quam ſequentes quinque, terminis omnibus inter ſe comparatis, nempe 1 : 1, 1 : 2, 1 : 3, 1 : 6, et 2 : 3. Id circo diuiſorum quemlibet aſſigno partium columnae principali alicui, et deinde proportionem partium nullam aliam aſſumo quam talem, quae ex omnifaria diuiſorum facta combinatione eruitur. Ipſum vero numerum compoſitum, ex quo omnia haec deriuantur, voco *Canonem Ordinis Architectonici*; ex quo ſolo Ordines hos inter ſe diſtinguo, et in quo ſolo character eſſentialis Ordinum conſiſtere videtur.

§. 10. Vt vero hoc inſtitutum generalius perſequar, aſſumo numerum compoſitum $m \times n$ ortum ex multiplicatione duorum numerorum primorum m et n, inter quos ſit n maior quam m. Reſoluetur hic numerus compoſitus in diuiſores ſequentes, 1, m, n, mn, atque exinde eruentur proportiones non plures quam ſequentes quinque, nimirum 1 : 1, 1 : m, 1 : n, 1 : mn, m : n; Vt deinceps diuiſorum quilibet ſuam ſibi conuenientem partem columnae principalem nanciſcatur: aſſumo 1 pro modulo columnae, m pro trabeationis, n pro ſtylobatae, mn vero pro columnae longitudine, quoniam ex regulis generalibus patet, trabeationis altitudinem minorem debere eſſe ſtylobatae altitudine, et columnae altitudinem vtramque priorum vt ſuperet, neceſſe quoque eſſe. Si vero quis ordinem hunc, et hanc aſſignationem malit inuerſam, inter ſtylobatam nempe et trabeationem, mihi perinde erit; in vtroque enim caſu id efficitur, vt partes principales

columnae

columnae nullam aliam inter ſe teneant proportionem, quam eas quae ex *Canone Ordinis* eruuntur.

§. 11. Iam vero etiam id requiro, vt partes columnae *ſecundariae* nullam aliam inter ſe ſeruent proportionem, quam quae ex generali *Canone Ordinis* eruuntur. Partes autem columnae *ſecundariae* comprehenduntur vel ſub ſtylobata, quae ſunt *baſis ſtylobatae*, *truncus*, et *coronis ſtylobatae*; vel ſub columna ſpecialius ſic dicta, quae ſunt *baſis columnae*, *ſcapus*, et *capitulum*; aut vero ſub trabeatione, quorſum referuntur *epiſtylium*, *zophorus*, et *coronix*. Harum partium ſecundariarum triga quaelibet nullam aliam tenere debet proportionem, quam quae ex Canone deriuatur. Leui itaque adhibito calculo analytico eruuntur altitudines partium ſecundariarum columnae totius, ſub *Canone Ordinis* $m \times n$ contentae, hunc in modum:

Stylobata $AD = n$.

baſis ſtylobatae $AB = \frac{mn}{1+m+n}$.

truncus $BC = \frac{n^2}{1+m+n}$.

coronis ſtylobatae $CD = \frac{n}{1+m+n}$.

Columna $DG = mn$.

baſis columnae $DE = \frac{mn}{2+mn}$.

ſcapus $EF = \frac{m^2n^2}{2+mn}$.

capitulum $FG = \frac{mn}{2+mn}$.

Trabeatio $GK = m$.

epiſtylium $GH = \frac{m}{m+2}$.

zophorus $HI = \frac{m}{m+2}$.

coronix $IK = \frac{m^2}{m+2}$.

§. 12. Quae igitur altitudines partium ſecundariarum ſi alicui columnae tribuantur, efficietur, vt et partes principales

cipales omnes inter ſe quomodocunque combinatae nullam aliam producant proportionem quam *Canone Ordinis* comprehenſam, et partes ſecundariae, quae ſub eadem principali continentur, etiam inter ſe quomodocunque combinatae ad earundem proportionum numerum reſtringatur. Ita ex. gr. *ſcapus* ad *capitulum* tenebit rationem $\frac{m^2n^2}{1+mn} : \frac{mn}{2+mn} = mn : 1$, quae ſub Canone continetur; atque ſic de caeteris partibus. Efficit denique quaelibet triga partium ſecundariarum ſimul ſumta altitudinem ſuae partis principalis, vti ex. gr. $AB + BC + CD = AD = \frac{mn+n^2+n}{1+m+n} = \frac{(1+m+n)n}{1+m+n} = n$, atque ſic pariter in caeteris.

§. 13. Hoc vnicum exinde naſcitur incommodum, quod partes diuerſarum trigarum ſecundariae proportionem inter ſe nanciſcantur aliquando inconcinnam; veluti ſi comparetur baſis ſtylobatae A B cum epiſtylio G H, eruetur proportio $\frac{mn}{1+m+n} : \frac{m}{m+2}$ vel $n.\, m + 2 : 1 + m +$. Sed vt taceam proportionem hanc in caſibus ſpecialibus aliquando fieri poſſe concinnam, et *Canoni Ordinis* conuenientem, conſiderandum eſt, impoſſibile hoc requiſitum eſſe, niſi regulis Generalibus Architectonicis contrariari velimus; atque inſuper easdam regulas id poſcere, vt partes ſecundariae ſub diuerſis trigis comprehenſae data opera a ſe inuicem diſcernantur; quarum legum iuſſu ſtabilitum quoque eſt, vt ne diuerſarum trigarum partes finitimae, veluti *coronis ſtylobatae* et *baſis columnae apophygi* inter ſe iungantur, atque ſic caueatur, ne in vnum coalitae hae partes credantur, quae diuerſae eſſe debent. Cuius quidem rei, ſi prolixus eſſe vellem, quamplurima exempla ſimilia in Muſicis quotidie vſitatiſſima allegare liceret.

§. 14. Quod autem iam de partibus columnae principalibus monui §. 10. nolle me inſiſtere earum altitudini quam iis hic tribuo: id etiam de partibus ſecundariis intellectum volo. Poteſt ex. gr. baſis ſtylobatae eſſe maior eiusdem coronide, poteſt eſſe minor; poteſt aequalis eſſe epiſtylio zophorus, potet eſſe inaequalis; ſunt enim hae circumſtantiae accidentales tantum, neque ad rei eſſentiam pertinent. Sed id ſolum obſeruari debet, vt ne alia ex mutatione facta exſurgat proportio, quam quae intra limites Canonis continetur, qui ſolus diuerſitatem Ordinibus inducit. Neque etiam id ita ſtrictim iuterpretandum eſſe velim, vt columna ſine ſtylobata eſſe nequeat. Notum enim eſt, *Vitruuium* fere nullis, et hodiernos *Tuſcanis* rariſſime, ſtylobatam concedere. Quae vero cum nonnunquam neceſſario requiratur, non poteſt non partibus principalibus accenſeri, atque, ſi alicubi deficiat, non tamen extra reliquarum proportionum *Canoni* debitarum limites extrauagari licet.

§. 15. His ita generaliter iam pertractatis nihil amplius reſtat, quam vt loco numerorum generalium *m* et *n* ſubſtituamus ſucceſſiue alios atque alios determinatos, videamusque quales ex quolibet Canone Ordinis columnarum figurae et proportiones proditurae ſint. Sit igitur primus Canon hic 2×3, hoc eſt $m = 2$, $n = 3$, erunt eius diuiſores 1, 2, 3, 6, atque eruentur exinde rationes ſequentes, 1 : 1, 1 : 2, 1 : 3, 1 : 6, 2 : 3, erunt itaque;

Stylobata AD = 3 modulis.
 baſis ſtylobatae AB = 1.
 truncus BC = $1\frac{1}{2}$.
 coronis ſtylobatae = $\frac{1}{2}$.

Columna

Columna DG $= 6$.
  baſis columnae DE $= \frac{3}{4}$.
  ſcapus EF $= 4\frac{1}{2}$.
  capitulum FG $= \frac{3}{4}$.
Trabeatio GK $= 2$.
  epiſtylium GH $= \frac{1}{2}$.
  zophorus HI $= \frac{1}{2}$.
  coronix IK $= 1$.

quibus ita delineatis exſurgit columna *Ordinis Primi*, Canonis 2×3, cuius formam repraeſentat Figura 5.

§. 16. Aſſumatur ſecundus Canon hic 2×5, in quo nunc eſt $m = 2$, $n = 5$, erunt diuiſores hi 1, 2, 5, 10, atque eruentur rationes ſequentes $1:1$, $1:2$, $1:5$, $1:10$, $2:5$, quae partim eaedem ſunt cum rationibus Canonis praecedentis, partim vero ab iis diſcrepant. Deducetur ex his

Stylobata AD $= 5$.
  baſis ſtylobatae AB $= 1\frac{1}{4}$.
  truncus BC $= 3\frac{1}{8}$.
  coronis CD $= \frac{5}{8}$.
Columna DG $= 10$.
  baſis DE $= \frac{5}{6}$.
  Scapus EF $= 8\frac{1}{3}$.
  capitulum FG $= \frac{5}{6}$.
Trabeatio GK $= 2$.
  epiſtylium GH $= \frac{1}{2}$.
  zophorus HI $= \frac{1}{2}$.
  coronix IK $= 1$.

quibus ita delineatis exſurgit columna Ordinis ſecundi, Canonis 2×5, cuius formam exhibet Figura 6.

§. 17. Aſſumatur tertius Canon hic 2×7, in quo eſt $m = 2$, $n = 7$, erunt diuiſores hi 1, 2, 7, 14, atque eruentur rationes ſequentes 1 : 1, 1 : 2, 1 : 7, 1 : 14, 2 : 7, in quibus nouae iterum ſunt in nullo praecedentium Canonum occurrentes. Deducetur ex his,

Stylobata AD $= 7$.
basis AB $= 1\frac{2}{5}$.
truncus BC $= 4\frac{9}{10}$.
coronis CD $= \frac{7}{10}$.
Columna DG $= 14$.
baſis DE $= \frac{7}{8}$.
ſcapus EF $= 12\frac{1}{4}$.
capitulum FG $= \frac{7}{8}$.
Trabeatio GK $= 2$,
epiſtylium GH $= \frac{1}{2}$.
zophorus HI $= \frac{1}{2}$.
coronix IK $= 1$.

quibus ita delineatis exſurgit columna Ordinis Tertii, Canonis 2×7, cuius formam exhibet Figura 7. Sed vlterius iam hoc modo, vbi nempe vnus factorum numeri compoſiti eſt 2, progredi non licet, ob hanc rationem: cum longitudo totius columnae generaliter prodeat $= n + mn + m$, eſſet, ſi aſſumeretur Canon 2×11, eius columnae longitudo $= 11 + 2 = 35$ modulis; ſed vetant Architecti in altitudine columnae 30 modulos excedere, imo praeſtantiſſimi eorum infra hunc numerum ſubſiſtunt; quare hanc Canonum formam vlterius extendere non licebit.

§. 18. Supponamus igitur aliam Canonis formam, nempe hanc 3×5, in quo eſt $m = 3$, $n = 5$, erunt diuiſores hic, 1, 3, 5, 15, atque eruentur rationes ſequen-

quentes, 1 : 1, 1 : 3, 1 : 5, 1 : 15, 3 : 5. in quibus denuo nouae ſunt, et in praecedentibus abſentes. Deducetur ergo ex his:

Stylobata A D = 5.
 baſis A B = $1\frac{2}{3}$.
 truncus B C = $2\frac{7}{9}$.
 coronis C D = $\frac{5}{9}$.
Columna D G = 15.
 baſis DE = $\frac{15}{17}$.
 ſcapus EF = $13\frac{4}{17}$.
 capitulum FG = $\frac{15}{17}$.
Trabeatio GK = 3.
 epiſtylium GH = $\frac{3}{5}$.
 zophorus HI = $\frac{3}{5}$.
 coronix IK = $1\frac{4}{5}$.

quibus ita delineatis exſurgit columna Ordinis Quarti, Canonis 3 × 5, cuius formam Figura 8. ſiſtit. Tab. V.

§. 19. Aſſumatur quintus Canon hic 3 × 7, in quo eſt $m = 3$, $n = 7$, erunt diuiſores hi, 1, 3, 7, 21, atque eruentur rationes ſequentes, 1 : 1, 1 : 3, 1 : 7, 1 : 21, 3 : 7; deducetur ex his:

Stylobata AD = 7.
 baſis AB = $1\frac{10}{11}$.
 truncus BC = $4\frac{5}{11}$.
 coronis CD = $\frac{7}{11}$.
Columna DG = 21.
 baſis DE = $\frac{21}{23}$.
 ſcapus EF = $19\frac{4}{23}$.
 capitulum FG = $\frac{21}{23}$.

 Trabea-

Trabeatio GK $= 3$.
epiſtylium GH $= \frac{3}{5}$.
zophorus HI $= \frac{3}{5}$.
coronis IK $= 1\frac{4}{5}$.

quibus ita delineatis exſurgit columna Ordinis Quinti, Canonis 3×7, cuius forma repraeſentatur Figura 9. Sed hic denuo ſubſiſtendum eſt, cum et huius Canonis columna altitudine ſua iam habeat 31 modulos, quod tolerari adhuc poteſt; ſed ſi aſſumeretur Canon 3×11, prodiret longitudo columnae iam 47 modulorum, et plurium adhuc ſi aſſumerentur Canones altiores, vti 5×7, 5×11, etc.

Tab. V.

§. 20. Mirum in hac Theoria accidit, quod non plures eruantur quam quinque Columnarum Ordines, quot nempe ad hunc vsque diem ſunt ab omnibus Architectis recepti. Stante ergo hac Hypotheſi, quod *Ordo Architectonicus* ſit congeries partium columnae, eam inter ſe rationem tenentium, quae ex numero e duobus primis compoſito erui poſſunt, neque alias praeterea includat; patet, plures quam quinque Ordines inuentu impoſſibiles eſſe, niſi in generales regulas Architecturae velimus impingere. Caeterum de *Ecphoris* partium in his delineationibus non adeo ſolicitus fui; poſſunt enim illae haud difficulter eodem modo inter ſe aptari, vt nullas niſi *Canonicas* aſpectui offerant proportiones.

§. 21. Ex altitudinibus et firmitatibus harum columnarum facile apparet, primam nimis paruam et humilem eſſe; ſecundam congruere cum *Tuſcano*; tertiam cum *Ionico*; quartam cum *Dorico*, et quintam cum Romano et

Corinthio, quod ex inſtituta comparatione inter menſuras meas, et illas quae in *Traité d'Architecture par Seb. le Clerc*, ſingulis Ordinibus tribuuntur, ſatis accurate colligere licet; quare vt iis accedant etiam *characteres Hiſtorici externi*, quaelibet earum ornamentis ad ipſam pertinentibus facile adhuc poterit adaugeri, quo facto deinde vtroque charactere praeditae apparebunt, quem in iis requiri oſtenſum eſt. Haec vero pro *ſpecimine* tantum *emendatioris Theoriae Ordinum Architectonicorum* hac vice ſufficiant.

DE

DE FVNGO INSOLITAE MAGNITVDINIS OBSERVATIO.

AVCTORE
Ioanne Ammano.

Anno praeterito, nempe 1739 mihi ex Ingria allata fuit fungi ſpecies, quae inferna capituli ſuperficie loco lamellarum tubulos obtinet. Erat hic fungus tam inſolitae et vaſtae magnitudinis, vt illum delineare et breuiter ſequentibus deſcribere operae pretium duxerim.

Pileus diametro pedem, craſſitie tres pollices aequabat eratque vtrinque conuexus, magis tamen ſuperficie ſuperna, quam inferna. Pediculus longitudine dimidii pedis, colore praeditus fuit dilute luteo et hinc inde albente, craſſitie prope baſin vbi craſſior erat, quam parte ea, qua capitulo inſerebatur, facile tres pollices ſuperans. Materies pediculi alba et leuis erat atque ſpongioſa. Pilei duplex fuit, ſuperior intus alba, extus luteo fuſca, illi ex qua pediculus conſtabat, ſimilis; inferior vero fiſtuloſa ex meris tubulis albentibus compoſita erat. Pertinet ergo ad fungorum eſculentorum genus, quod Clar. Michelius ſub Suilli titulo inſtituit. Repertus fuit autumno in villa Comitis Goloffkin.

DESCRIPTIO ET ICON NOVAE BERMVDIANAE SPECIEI.

AVCTORE

Ioanne Amman.

Inter res naturales plures, quas R. R. P. P. Societatis Ieſu Pekino Sinenſis Imperii Capite ad Academiam Petropolitanam ante aliquot annos miſerunt, ſemina etiam erant globoſa et aterrima YEN TSCHI titulo inſignita. Haec terrae calore equini ſtercoris tepenti Iunio menſe in horto Academico commiſi. Breui temporis ſpatio exinde enaſcebantur plantae Iridum iunioribus admodum ſimiles, quae fictilibus inditae et in hybernacula poſitae hyemem quamuis longam et rigidam facile tolerabant.

Sequenti autem anno primo Vere e radicibus harum plantarum, quae Iridum adinſtar carnoſae, oblongae et repentes ſunt, quam plurimas fibras longas, craſſas, luteas emittentes, duo tres, aut plures oriebantur caules bipedales plus minus, prope radicem calami olorini craſſitie, nec compreſſi, nec alati, vt in aliis huius generis ſpeciebus fieri ſolet; ſed teretes fere, laeues, pallide virentes, octo nouem aut decem geniculis diſtincti ad incerta prorſus interualla.

Singulis hiſce geniculis folia adnaſcebantur Iridis hortenſis, latifoliae C. Bauhini valde ſimilia, dilute viridia, lata baſi caulium genicula amplexantia, arcuata, in medio ſeſcunciam praeter propter lata, in tenuiſſimum mucronem terminata, ſecundum longitudinem ſtriata, glabra, conſiſtentiae ſatis firmae. Folia, quae circa medium caulis creſcebant, iis quae prope radicem et caulium ſummitates naſcebantur, multo erant maiora.

E ſuperiorum foliorum ſinubus temporis progreſſu ramuli emittebantur folioſi itidem et geniculati, teretes et glabri, in alios minores diuaricati, e quorum geniculis tandem et ex accretorum foliolorum alis pediculi ſurgebant vnciales plus minus, tenues, e viridi flaueſcentes, tres quatuor aut plures, quorum ſinguli in cacumine embryonem gerebant triquetrum, oblongum, ſplendentem, dilute viridem. His autem innaſcebantur flores ſatis ampli, hexapetali, interdiu expanſi, noctu clauſi. Florum petala ſingula ſemunciam circiter longa erant, trientem pollicis praeter propter lata, vtrinque anguſtata, e flauo rubentia, intus maculis plurimis coccineis, elegantiſſimis inſignita, prope baſin, interna ſcilicet eorum ſuperficie, ad medium vſque parum ſulcata, in quibus ſulcis liquor mellei ſaporis continebatur. Petala haec durabilia non erant, ſed ſpatio vnius aut alterius diei flacceſcebant, contorquebantur, et embryonis ſummitati ſpirae in modum contorta eidem ad maturitatem vſque inhaerebant.

Embryonum porro ſingulorum ſummitatibus innaſcebatur piſtillum vnciam circiter longum, prope baſin valde tenue et teres, extremum verſus ampliatum, triquetrum, coloris dilute rubentis, apice in ſex ſegmenta, tria ſcilicet exteriora et maiora, atque in interiora minora, oblonga, pallida et piloſa fiſſum.

E tribus autem petalorum interiorum vnguibus, quae exterioribus ſubinde paullo maiora ſunt, ſtamina oriebantur in ſingulis petalis ſolitaria, piſtillo dimidio fere breviora, dilute itidem rubentia, apicibus praedita trientem vnciae longis, dimidiam circiter lineam latis, ſubtiliſſimo luteo puluere aſperſis.

Embryo

Embryo floribus marceſcentibus excreſcebat in fructum obtuſe trigonum, glabrum, pallide vireſcentem, extremitatem verſus ampliatum, in tria loculamenta diuiſum et per maturitatem trifariam dehiſcentem. In ſingulis hiſce loculamentis baccae continebantur plures, ſphaericae, Coriandri ſeminis magnitudine, aterrimae, ſplendentes, axi affixae: pulpae autem medium occupabat ſemen durum, ſphaericum itidem, coloris fuſci. Hiſcente per maturitatem fructu baccae axi medio ſatis firmiter adhaereſcentes exiguam uvam quodammodo et aſpectu pulchram repraeſentabant.

Iulio menſe in horto Academico florere incipiebant ſupra deſcriptae plantae et per integrum Auguſtum flores magna copia proferebant, verſus finem autem Septembris et Octobri menſe fructus maturabant.

Increſcente hyeme folia et caules moriuntur. Radices, quae perennes ſunt, in hybernaculis modice calidis ſeruari et parum ſed ſepius irrigari debent.

Florum petalis et fructu noſtra haec planta cum Bermudianae ſpeciebus a Celeberrimo Tournefortio in Inſtitutionibus rei herbariae recenſitis conuenit, differt ſtaminibus a prima Eius ſpecie et ab alia illa exiliori Virginiana, quas ambas, accuratiſſime, vt ſolet, Celeberr. Dillenius in horto Elthamenſi deſcripſit et delineauit, in quibus ſtaminum apices piſtillo appreſſi ſunt, ſecus ac in noſtra planta, quae ſtamina obtinet libere fluctuantia: differt ſeminibus pulpa obductis; fructus membranis per maturitatem penitus reflexis, ſeminibus interim non deciduis; piſtilli ſummitate in ſex ſegmenta diuiſa. Differt denique ab Ixiae genere a Clariſſ. Linnaeo in Corollario generum plantarum inſtituto petalis florum vt plurimum inaequalibus; piſtillo ſtaminibus duplo fere longiori, eiusdem ſtig-

mate in ſex ſegmenta diſſecto; ſeminibus non ſaepius, vt ſcribit, ſolitariis, ſed pluribus ſemper in ſingulis fructus loculamentis. Verum ſi omnes has minutias ad conſtituenda genera adhibere velimus, tot erunt genera, quot ſunt plantarum ſpecies.

Retuli elegantem hanc plantam ad Bermudianae genus a Tourneſortio primo definitum et a Dillenio confirmatum, poſtea vero a Linnaeo ſub alio, Siſyrinchii nempe titulo in generibus ſuis plantarum deſcriptum, quia petalorum numero, calyce vel embryone ceu futuri fructus rudimento cum eo conuenit. Reliquae differentiae ſpeciem non genus determinant.

Haec igitur Bermudianae ſpecies, vt clarius ab aliis diſtinguatur, ſequenti nomine inſigniri poteſt:

BERMVDIANA RADICE CARNOSA, FLORIBVS MACVLATIS, SEMINIBVS PVLPA OBDVCTIS;

His enim notis a reliquis ſpeciebus, de quibus bonae et perfectae deſcriptiones apud rei herbariae ſcriptores extant facillime, vel ſolo nomine diſtinguitur

Explicatio Tabulae.

Fig. 1. Plantam repraeſentat integram, radice excepta.
Fig. 2. Radicem plantae iunioris, quae nondum flores protulit.
Fig. 3. Floris magnitudinem naturalem. Lit. a piſtillum eius.
Fig. 4. Fructum nondum prorſus maturum cum reſiduis floris petalis ſpirae in modum contortis.
Fig. 5. Fructum maturum dehiſcentem.
Fig. 6. Baccas demonſtrat. Quae lit. a inſignita eſt, in China creuit; quae lit. b. Petropoli nata eſt e ſeminibus ex China miſſis.
Fig. 7. Semen repraeſentat.

CLASSIS

CLASSIS TERTIA
CONTINENS
HISTORICA.

DE VESTRITIO SPVRINNA LYRICO ET EIVS FRAGMENTIS.

AVCTORE
T. S. Bayero.

OPVS POSTVMVM.

Caſpar Barthius Veſtritii Spurinnae fragmenta, vt erant in MS. Martispurgenſi, inter venaticos ſcriptores et poſt aliquanto in Aduerſariis edidit. Cum *Veſprucii ad Martium* inſcriberentur, e Plinio, Martiale ipſisque fragmentis oſtendit, illum Veſtritium Spurinnam fuiſſe, hunc Marium. Veſtritii Romae familia equeſtris, quod quidem Thomas Reyneſius in titulo Vrbinate ſibi viſus eſt reperiſſe: (1)

VESITIO. DEXTRO. E
QVIT. ROMAN. PATRON.
MVNICIPI. ET. PLEBIS
OMNIBVS. HONORIB.
PERFVNCT.

Nimirum Reyneſius pro VESITIO reponit VESTRITIO. Equidem non video, quid id ſit, quod non etiam Veſitios equites Romae fuiſſe patitur Reyneſius. In alio titulo apud Ianum Gruterum: (2)

DIS. MANIBVS
T. VESTRITIO
HYGINO. ET.
VESTRITIAE
CONIVGI
CARISSIMAE. FECIT
RHAMNVS. LIBERT.

Vt

(1) Exſtat hic titulus etiam in Corpore Inſcriptionum Gruteriano, poſtremae edit. p. 392. 1. (2) p. 957. 5.

Vt huic Veſtritio cognomen fuit Hygini, ita iſti noſtro, Spurinnae, qui generis ſui memoriam tum belli tum pacis artibus inſignitam reliquit. Natus mihi videtur A. C. XIII. dicam commodius poſtea, cur ita ſentiam. Tota illius adoleſcentia et pars maxima virilis aetatis in foediſſima tempora C. Caeſaris, Tib. Claudii et Claudii Neronis incidit. Summum fere in amicitia locum apud M. Saluium Othonem ante principatum tenuit: hunc nihil ita commendauit Neroni, quam morum ad omnem turpitudinem congruentia, elegantiam ipſi interpretabantur. Quare dubium non eſt aut obſcurum, Spurinnam iis moribus inſeruiiſſe, quibus et Otho delectatus eſt et Nero Caeſar. Coniectus deinde eſt in turbas reipublicae et Othonis Vitelliique contentiones de principatu. M. Saluius Otho aere alieno ingenti ad nouandum aliquid motus, militibus corruptis et Sulpitio Galba Imp. ſublato, principatum inuaſit. At A. Vitellius Germanicis legionibus ſuffultus ipſe imperare malebat, quam Othoni ſubiici. In Dalmatia et Pannonia exercitus Othoni dicto audientes erant: his contra Vitellium mouentibus alia ab Vrbe manus, quinque praetoriae cohortes et equitum vexilla cum legione prima duobusque millibus gladiatorum profecta ſunt ad Padum. Rectores his copiis vrbanis dati Annius Gallus et Veſtritius Spurinna: ita Cornelius Tacitus tradit (1) et iis quidem verbis, vt haud multo maior ad imperandum auctoritas Annio tributa fuiſſe videatur, quam Spurinnae. Cum deinde dubio Marte inter Othonem atque Vitellium in Liguribus eſſet concurſum, Caecina Alienus Vitellianis cum copiis

(1) Hiſt. l. II. c. 11.

copiis Ciſpadanam prouinciam intrauit, in qua Spurinna cum exercitu erat. Hic cernens Caecinae reſiſti non poſſe, ſe ſuosque intra Placentiae moenia recepit. Ibi conſtituit hoſtium vim repellere, ſi oppugnaretur: egredi et conſerere manum cum hoſte non e re eſt viſum. Miles in diuerſa tendebat, eam non prouidentiam ducis ratus, nihil temere ſtatuentis, ſed ſegnitiem. Tumultu militari coactus Veſtritius ducere, ſub noctem caſtra poſuit ad Padum, eoque obſequio mitigatos ſuorum animos docendo monendoque tractare coepit, donec in poteſtate habuit, vt ſe in vrbem reduci paterentur. At Caecina vbi ſenſit Spurinnam rem certamini non committere, Placentiam obſidet. Primum atque iterum a munimentis repulſus, multis ſuorum deſideratis, obſidionem ſoluit, Cremonam petit. Quo cognito Spurinna Annium Gallum de conſiliis hoſtium certiorem fecit; is cum prima legione Placentiam venit, ſecutusque Caecinam parum abfuit, quin ſeditionibus militaribus agitatum opprimeret. Poſt non ita multo Otho Imp. ſuperuenit: vocatus in caſtra Veſtritius cum praeſidio quod Placentiae habebat: erat enim conſtitutum Imperatori, ducibus nequidquam aduerſantibus de ſumma rei praelio decernere. Pugnatum haud procul Bedriaco: Othoniani victi. Tamen militum fides victum non deſtituit: ipſe caſuum dubia metuens manus ſibi intulit: ita partes in poteſtatem victoris conceſſerunt. Cum deinde Fl. Veſpaſianus ex Oriente aduentaret, auerſis omnium ab A. Vitellio animis, non modo qui antea Othoni ſtuduerant, ſed Caecina quoque, qui magnas res pro Vitellio geſſerat, ad nouum Imperatorem defecerunt.

Laeta reipublicae tempora ſub Veſpaſianis principibus: tanto infeſtiora claris viris Domitiano Imp. Obiit interim Spurinna variis perfunctus officiis, geſſit magiſtratus, prouincias rexit, (1) deinde etiam exercitibus Germanicis praefuit, Bructerum regem vi et armis induxit in regnum, et ferociſſimam gentem terrore nominis Romani perdomuit: quas ob res geſtas Spurinnae ſtatua triumphalis auctore Principe a Senatu eſt decreta. (2) Sunt, qui hanc expeditionem Traiani temporibus inſerunt: at Ioannes Iacobus Maſcouius, vir ſumma doctrina, graui argumento Neruae Imp. vindicauit. Cui ſententiae confirmandae tametſi quaedam etiam a nobis produci poſſe ſentio, tamen cum alia e contrario obſtare videntur, ampliandum potius duco. Magis apparet, Plinium ad Caluiſium de Spurinnae moribus ſcripſiſſe (4) eo anno, quo conſulatum adiit, tamen ante Septembrem menſem, quo menſe A. C. 100. a Traiano eſt ſuffectus Plinius. Eius enim anni epiſtolas liber tertius continet. Agebat tum in otio Spurinna, annum ſeptimum et ſeptuageſimum exceſſerat, aurium oculorumque vigore integro, agili viuidoque corpore. Ex quo poteſt confici, A. C. XXIII. natum. Quemadmodum otium collocauerit, Plinius venuſtiſſime more ſuo pinxit. Inter cetera ait: *ſcribebat, et quidem vtraque lingua, lyrica doctiſſime.* Habuit in matrimonio Cottiam, e qua Cottium filium nomine materni aui ſuſcepit. Is deceſſit, cum pater bello Germanico diſtineretur: adoleſcens, non tam ſtatua ob virtutem publice poſita nobilis, raro iis

(1) Plinius Epiſt. l. III. 1. (2) ib l. II. ep. 7. (3) In Hiſtoria Germanica p. 142. (4) l. III. ep. 1.

[illegible] (1) Ad qu[illegible] quam quod praeconem haec ſua ſcripſerit, non ita cer[illegible]autem Marium Veſtritius ad Marium Celſum puto. Is Galba[illegible]: tamen ercitus ſollicitauit. (2) Transgreſſus deinde ad Othonem cum Annio Gallo, Veſtritio Spurinna, et Suetonio Paullino res contra Caecinam geſſit. Ante praelium ad Bedriacum Marius Celſus Cos. cum ceteris ducibus ſenſit, ſummam rei in vnius diei certamen non oportere committi. A praelio A. Vitellio Imp. conciliatus in magiſtratu permanſit, quamquam et dignitati eius inſidiabatur Caecilius Simplex et vitae. (3) Si Barthium audias, hic quoque Spurinnae Marius quieti ſe dedit et voluptati, quae ex otio liberari ab ambitione ſeiuncto capi poteſt. Nam ad eum hoc Martialis epigramma trahit: (4)

Mari, quietae cultor et comes vitae,
Quo ciue priſca gloriatur Atina,
Has tibi gemellas, barbari decus luci,
Commendo pinus iliceſque Fauni.

Sin Martialis epigramma conſideres, non Marium Celſum conſularem, ſed hominem obſcurum dicit Atinatem ſecum ruſticantem, nec dignum ſatis Veſtritii amicitia. Contra ea opinor, Martialem alio epigrammate (5) vellicare Marium Celſum, tamquam ob priſtinam dignitatem a multis cultum clientibus vt hominem nobilem, at fortuna tenui, aut modicis in opibus, quae tum iam paupertas Romae cenſebatur, et vt partium victarum ducem.

(1) l. II. 7. l. III. 10. (2) Tacitus Hiſt. l. I. c. 31. l. II. c. 23. (3) Tacitus l. II. c. 60. (4) l. X. 92. (5) l. X. qui liber editus eſt Traiano Imp. epigr. 92.

Nec vocat ad coenam Marius, nec munera mittit,
Nec ſpondet, nec ſterilem quae curet amicum,
Turba tamen non deeſt quae ſunt tibi, Roma, togae.

VESTRITII SPVRINNAE FRAGMENTA EX EMENDATIONE NOSTRA.

ODE PRIMA.

Dulces Veſtritii iocos,
Seras Socraticae relliquias domus,
Ne laudes nimium, Mari:
Contemnit placitas nobilibus viris,
Soli qui ſapientiae,
Poſt florem, tepidum nec ſtabilem gradum
Aetatis, ſenium dicat
Mentis compoſitae, qualis ab arduis
Ad ſe verſa laboribus,
Quos non dat patriae, ſepoſuit ſibi
Annos, orba lucro graui,
Cum non ambitio tegmine candida
Illudat grauidae ſpei.
Nos ſero pelagus vicimus inuium,
Quidquid viximus, interiit.
Aetas quem decies ſeptima diuidit,
An leues memoret iocos,
Atque aptos citharae conciliet modos,
Surdis auriculis ſtrepens?
Quisquis decrepiti corporis eſt, reus

Sat ſeſe eloquii probat,
Si ſeruet placidi iura ſilentii,
[illegible]ium otii.
Hoc cani grauitas verticis abſtitit,
Non vt ſponte ſua fugax:
Sed multi numeris carminis *

Deſunt reliqua.

ODE SECVNDA.

Faue, ſancta deûm ſata,
Nullis, pauperies, numinibus minor,
Tecum ſi ſapias tibi,
Vitae, magnificis hoſpes honoribus,
Abſoluens numerum tuae.

Deſunt aliqua.

In te laetitiae, ſordida cum quies
Lautis nuda tumultibus,
Ambit ſe patria fertilis in domo.

Deſunt quaedam.

Nullis vendita plauſibus,
Contemtrix queruli magno animo fori,
Nil non ſola potens, vbi
Furtiuis procerum ſuppliciis procul,
Regnas in proprio ſinu.
Felix, quem teneris mater ab vnguibus
Et regina rapis ſimul.
Non illum tumidis faſcibus arduum
Verſat nobilitas mala
Curarum, facilem fluctibus, vt ſuis

Orbum ſideribus rotet.
Illum ſplendida nox et decor improbe
Caecus praecipitant **

Cetera deſunt.

ODE TERTIA.

Poſtquam fixa ſolo ſemel,
Spernit fluctiuagos ancora nauitas
In ſaeuum pelagus ſequi,
Quam vitat grauido perniciem mari,
In ſicco reperit ſinu:
Haerentem tumidis littore dentibus
Aerugo propria exedit.
Ni deſidia ſancta quies leuet,
Turbas dum populi fugis,
Priuatis quaties fata tumultibus,
In te ludere peruicax.
Noctes et vigilans ſomnia ſi furor
Tortis non librat anguibus,
At preſſo gracilis cura manet pede.

ODE QVARTA.

Deeſt principium.

Ingrati nebulae deſidii caput
Circumſtant tepidum: ſors nimia in probos
Inceſtis facilis annuit auſibus.
Sta contra aſſiduo pede.
*Multum turba tenax * fidei **
Vltra fata furit, non docilis fugae
*Deſider ** praemio.*

Veſtri-

Veſtritii] In MS. Martiſpurgenſi: Incipit Veſprucius Spurinna de contemtu ſeculi ad Martium. De Veſprutio ſiue potius Veſtritio ſatis diximus. Barthius has odas pingue quiddam et minime eruditum ſonare iudicauit: at ille, vt de Pane dicebat caprarius, ἔντι γε πικρὸς ϗ οἱ ἀεὶ δριμεῖα χολὰ ποτὶ ῥινὶ κάθηται. Primum in titulo aliquid barbari deprehendere ſibi eſt viſus, cum *ſeculum* more maiorum noſtrorum, ſanctorum hominum, dicatur, *quod viuimus aeui*; addit aſtute: *votis coeleſtia anhelantes*; ſed nihil ad rem. *Seculum* aetate Veſtritii dixere, vt *aeuum* et αἰῶνα. Late patuit iſtarum vis vocum; nam *aeuum*, vt Cenſorinus de die natali c. 16. *tempus immenſum ſine origine et fine*, vt Varro de lingua Latina p. 46. ed. Scal. *aetas omnium annorum*. Tamen etiam arctiſſimo ſpatio, vitae decurſum dixere *aeuum*. Lucretius l. II. v. 16.

quantisque periclis
Degitur hoc aeui quodcumque eſt?

Sic αἰῶνα Homerus Odyſſ. E. 151.

οὐδέ ποτ' ὄσσε
Δακρυόφιν τέρσοντο, κατείβετο δε γλυκὺς αἰών.

Loca ſunt in eo alia paene infinita. Euſtathius ad iſtum locum interpretatur τὴν ζωὴν, ἡ φθίναι τοῖς μακροῖς θρήνοις, ſic ſcholia minora quoque. Solon apud Herodotum l. I. c. 32. τελευτήσαντα καλῶς τὸν αἰῶνα. Ita *ſeculum* non modo centum annorum aeuitatem dicebant, ſed etiam ſuam quisque aetatem et ſuorum aequalium. Cicero in Paradoxis: *ego etiam in huius ſeculi errore verſor*, et alibi, *inſolentia huius ſeculi*. Poſt id coeptum eſt dici non, vt oratorem delectauit, *hoc ſeculum*, ſed dumtaxat, *ſeculum*.

Plinius

Plinius ad hunc ipſum Spurinnam l. V. ep. 17. *faueo ſeculo, ne ſit ſterile et effoetum*, et ad Cornelium Tacitum l. VII. ep. 33. *Diuus Nerua non mihi ſolum, ſed etiam ſeculo gratulatus eſt, cui exemplum ſimile antiquis contigiſſet.* Tacitus ipſe Hiſt. l. II. c. 37. Paullinum *non ſperaſſe corruptiſſimo ſeculo tantam vulgi moderationem.* In numis frequens: SECVLVM FRVGIFERVM. SECVLVM FOECVNDVM.

Igitur de *ſeculo*, Barthii accuſatio nihili eſt: at totum iſthuc *de contemtu ſeculi*, non item vetuſtatem et Veſtritium ſapit; eſt igitur totum hoc librarii chriſtiani.

' *Seras Socraticae*] Domus Socratica Horatio l. I. Ode XXIX. 14. philoſophia Socratis et diſciplina:

> *Cum tu coëmtos vndique nobiles*
> *Libros Panaetl, Socraticam et domum,*
> *Mutare loricis Iberis,*
> *Pollicitus meliora, tendis.*

At Veſtritius non philoſophiam reſpicit, verum Socratis feſtiuam in dicendo cauillationem, quam et domus eius, omnes Socraticae ſcholae philoſophi conſectati ſunt, cum tota eius μαιευτική, nemo tamen excellentius Platone. Erant ioci liberales, digni philoſophiae grauitate. Poſt id credo certi homines ſpurcitiem omnem leuandae cauſſa inuidiae Socraticos iocos dixere. Ita ἐυτραπελιαν Ariſtotelis aetate Graeci dicebant vitae genus plenum officiis, gratia, comitate, verbis quodam ſale conditis, oris corporisque motu ad omnem honeſtatem et humanitatem compoſito. At M. Tullii temporibus, vt ſolent virtutum et honeſtarum

neſtarum rerum nomina turpiculis praetexi, adeo nihil caſti et decori ἐν εὐτραπελίᾳ et in *vrbanitate* eſſe videbatur, vt Volumnius et Papirius Paetus vel ea cauſſa εὐτράπελοι haberentur, quod eſſent ſpurciſſimi, Paetus adeo, vt eum Cicero reprimeret l. IX. ep. 22. *amo verecundiam.* Et iterum eximius orator, *ſeruo et ſeruabo Platonis verecundiam.* Adi l. VII. ep. 32. Octauius Minucii Felicis c. 28. *apud vos tota impudicitia vocatur vrbanitas.* Paullus Apoſtolus ad Epheſ. V. 4. αἰσχρότης καὶ μωρολογία ἢ εὐτραπελία, quo loco εὐτραπελία, vt tum in ore vulgi erat, vtrumque comprehendit et αἰσχρότητα et μωρολογίαν, cui opponit εὐχαριστίαν ſiue *comitatem*, qualem c. IV. v. 29. deſcripſit, λόγον ἀγαθὸν πρὸς οἰκοδομὴν τῆς χρείας, ἵνα δῷ χάριν τοῖς ἀκούουσι. Veſtritius, vt eius mores in Othonis Neronisque contubernio fuiſſe comperimus, obſcoeni oris foetores *Socraticae domus reliquias* dixit, *feras* vero, cum tempus perpetui aeui inde a Socrate metiretur, a quo eſſent quaſi ductae.

contemnit placitas] *reliquias placitas*, quae placuere et placent. Virgilius Aen. IV. 38. *placitone etiam pugnabis amori?* In Ciri: *et placitum paucis auſa eſt adſcendere collem.*

nobilibus viris] In MS ** *bilibus*: ergo Barthius *mobilibus*: malo *nobilibus*, vt dicat *nobiles* philoſophos Socraticae domus, eo modo quo Horatius *nobiles libros Panaeti.* Etiam apud Rutilium Numantianum Barthius ſcribi maluit,

Factus et Alcides mobilitate deus,

Almelouenius *ferocitate.* Nihil opus eſt his tumultibus, bene habet *nobilitate.* Paullo poſt is ipſe Rutilius:

Nobilis ad ſummas gloria venit opes.

De hac nobilitate Herculis conſidera Pindarum in Nemeis, Ode A, et Tzetzen ad Lycophronem v. 33. 39.

Soli] Eſt, vt vides, a *ſolo*, quod non notarem, niſi Barthius a *ſole* maluiſſet.

Poſt florem] Ego ita diſtinxi, quae ac Barthio confuſa erant. *Tepidum*, quo ſenſu praetextatum eſt Horatio, Ode IV. 19.

quo calet iuuentus

Nunc omnis: et mox virgines tepebunt.

Etiam *adoleſcentes tepidos* dixere Romani, propter aetatem laſciuiae obnoxiam: *non ſtabilem gradum*, procliuem in vitia. Et *florem* Veſtritius, vt *ver* Catullus ad Manlium:

Tempore quo primum veſtis mihi tradita pura eſt,

Iucundum cum aetas florida ver ageret,

Multa ſatis luſi.

Inſtabili et tepido gradui adoleſcentiae *ſenium mentis compoſitae* opponitur. Seneca ep. II. *primum argumentum compoſitae mentis exiſtimo, poſſe conſiſtere et ſecum morari: iſta lectio multorum auctorum habet aliquid vagum et inſtabile.* Anicius Boethius initio Conſolationis philoſophicae: *Qui cecidit, ſtabili non erat ille gradu* Id l. I. metro IV.

Quisquis compoſito ſerenus aeuo

Fatum ſub pedibus dedit ſuperbum.

ab arduis] *mens ab arduis laboribus ad ſe verſa*, quod otium erat honeſtum atque liberale rei publicae muneribus defuncto. Salluſtius principio Catilinariae hiſtoriae: *vbi animus ex multis miſeriis atque periculis requieuit, et mihi reliquam aetatem a re publica procul habendam decreui.*

dat patriae] Sine dubio ſic, cum in MS. eſſet, *det pa* **

orba

orba lucro] lucro ait mentem carere, quod moleſtiam et faſtidium contineat. Terentius in Heautont. A. IV. Sc. V. v. 25. *nae ille haud ſcit, paullum lucri quantum ei damni apportet.*

Credi ion *ambitio*] Erat in MS. ** *ambitio tegmine cas*, qua quis aetate non vltra honores ambiat, vt apud Virgilium Tityrus: *candidior poſtquam tondenti barba cadebat.* Malim vero nunc *ambitionem tegmine candidam.* Reſpicit non modo candidatos priſcos, ſed etiam ambitionis ſpeciem externam, laetam illam quidem, at cum interiori moleſtia coniunctam: candidam, ſplendentem et laetam, vt Catullus *candidos ſoles.* Ambitio illudit *grauidae ſpei.* Grauida, quod ſpes alia naſcatur ex alia, et ſubinde nos recreet: habet enim ψεύδεα θ' αἱμυλίȣς τε λόγȣς in pectore: tandem ſaepe atque multum ab ambitione atque ſpe illuſus animus, rebus quas ſperauerat partis, neque expletus tamen, iſthuc Aiacis Sophoclei ingemiſcit, ἰό μοι γέλωτος, οἷον ὑβρίσθην ἄρα.

pelagus] Res dicit geſtas et munera rei publicae plena procellis et periculis, vt alia in re Horatius Ode V. 1.

me tabula ſacer
Votiua paries indicat humida
Suſpendiſſe potenti
Veſtimenta maris deo.

Archilochus apud Cedrenum p. 792. ſenectuti ait συμφέρειν τὴν ἀπραγμοσύνην.

quidquid viximus] Prudentius venuſte in principio:

Per quinquennia iam decem,
Ni fallor, fuimus:

Inſtat terminus, et diem
Vicinum ſenio iam deus applicat.

Et poſt paullo:

Cum iam quidquid id eſt, mors aboleuerit. aetas

Aetas quem decies ſeptima diuidit] Decies ſeptima os et annos[illegible] ſeptuageſimo decurrens ita me in dies ſundam mei partem decerptura ſit. *Diuidit*, vt apud Martialem l. X. 10.

Diuiſit noſtras purpura veſtra togas.

Malo enim *diuiſit* quam Gruterianum *dimiſit*, quod Ms. Berolinenſe quoque habet. Tua, inquit, purpura noſtras togas exuit, et nemine in partem admiſſo, rapuit ſola omnes. Id eo dicit, quod Paullus homo nobilis, potens et locuples humillima quaeque officia ita accurate obiret, vt nulli quidquam concederet.

an leues] Etiam Horatius Carm. l. I. Ode XV. v. 35. in choriambico trimetro choreum poſuit:

Poſt certas hiemes vret Achaicus
Ignis Iliacas domos.

Tibullus l. I. El. I. v. 85.

Iam ſubrepet iners aetas, nec amare decebit,
Dicere nec cano blanditias capite.

Olympius Nemeſianus Ecl. I. 9.

Hos annos canamque meam, mihi care, ſenectam
Tu iuuenis carusque deis in carmina cogis?
Viximus et calamis verſus cantauimus olim,
Dum ſecure hilares aetas ludebat amores:
Nunc album caput, et Veneres tepuere ſub annis.

Surdis auriculis] meis, quae iam obriguere ad voluptates.

Quis-

Quiſquis decrepiti] Haec ita reſtitui, cum eſſet e Ms. editum a Barthio:

Quiſquis decrepiti corporis eſt reus,
Sat ſeſe eloquii probat.
Si ſer placidi iura ſilentii.*

Reus eloquii, vt apud Tullium, *Milo reus praeclari facti.* Lenis eſt traiectio: *ſenex, cum reus eſt eloquentiae, ſat ſeſe probat*, ſiue, *ſe purgat et aliis ſatisfacit.* Ceterum vt ait Horatius l. III. Ode II. 25.

Eſt et fideli tuta ſilentio
Merces.

Quem verſum ſeu Auguſtus Horatio ſiue Horatius Auguſto Caeſari debuit: eſt enim apud Plutarchum in Apophthegmatis Auguſti ad Athenodorum: ἔϛι ϗ σιγῆς ἀκίνδυνον γέρας. Euripides in Oreſte v. 639.

ἔϛι δ᾽ οὗ σιγὴ λόγου
Κρείσσων γένοιτ᾽ ἄν. ἔϛι δ᾽ οὗ σιγῆς λόγος.

Tacitus de Afro oratore Annal. l. IV. c. 52. *proſperiore eloquentiae quam morum fama fuit: niſi quod aetas extrema multum etiam eloquentiae demſit, dum feſſa mente retinet ſilentii impatientiam.*

Si patrocinium otii.] Cenſeo ἀπὸ κοινοῦ, *ſeruet.*

hoc] ab hoc vitae genere mea ſenectus, non tamen ſponte ſua abſtitit. Ceteris mederi non poſſum.

Faue] Verbum ſolemne multum gratiae hoc loco habet. Tibullus *Phoebe faue*, Naſo *Veſta faue*, Virgilius *Lucina faue.* Iambus vt in illo Catulli carmine ſeculari:

Dianae ſumus in fide
Puellae et pueri integri.

Sancta deûm ſata] Graecorum imitatione θεογενὴς, διογενὴς diis genita, quod et ipſi pauperes eſſent dii, praeſertim, vt cauillatur Ariſtophanes in Pluto v. 540. Iupiter. Aelianus apud Euſtathium in Periegeten v. 45. aras paupertati dedicatas commemorat, ſicuti apud Athenaeum Calliſthenes tradit, Lacedaemone famis ſimulacrum iuxta ſolium Apollinis conſecratum fuiſſe. At hi vt peſtem colebant, ita et paupertatem et famem, ne noceret. Spurinna vt Socratica e domo tanquam beneficium deorum immortalium reſpicit, erat enim tota domus illa araneis plena. Ariſtophanes in Nubibus v. 101. μεριμνοφροντιστὰς, ὠχριῶντας, ἀνυποδήτους vocat Socraticos, et vbique illuuiem ſordesque familiae obiicit. Deinde Socratis exemplo philoſophi in commendanda paupertate multi ſuere, vt ſunt in ea quaedam vitae commoda, niſi ſi eſurias et plores, quod non pauperis eſt ſed mendici. Theocritus in Αλιεῦσι,

Α πενία, Διόφαντε, μόνα τὰς τέχνας ἐγείρει,
Αυτὰ τῶ μόχθοιο διδάσκαλος.
Paupertas, Diophante, ſola artes excitat,
Ipſa miſeri magiſtra.

tecum ſi ſapias tibi] Si tuis contenta bonis a cupiditatibus abſtineas. Ariſtophanes in Pluto v. 551.

πτωχοῦ μὲν γὰρ βίος, ζῆν ἐστι μηδὲν ἔχοντα
τοῦ δὲ πένητος, ζῆν φειδόμενον καὶ τοῖς ἔργοις προσέχοντα
περιγίγνεσθαι δ'αὐτῷ μηδὲν, μὴ μέντοι μηδ'ἐπιλείπειν.
Mendici vita eſt, nihil habentem viuere,
At pauperis vita, viuere parce et rebus ſuis vacare,
Nihil vt ſuperſit ipſi, nihil vero etiam vt deſit.

Vitae

Vitae magnificis hoſpes honoribus abſoluens numerum tuae] In MS. *Vlta*, inde Barthius, *Vltra*. Hoc quidem nihil eſt. Scripſiſſe puto Spurinnam, vt nos edidimus,

Magnificis hoſpes honoribus,

vitam peragens alienus ab honoribus et ambitione.

Lautis nuda] In MS. *vnda*. Recordare *lautos tumultus* in domo Euclionis apud Plautum in Aulularia.

ambit ſe patria fertilis in domo] MS. *patriae*. Se ipſam ſordida ob paupertatem quies ambit et amplectitur, ſe contenta eſt ipſa, vt apud illum Horatianum colonum, qui paterna rura colebat Epodon II.

Beatus ille, qui procul negotiis,
Vt priſcá gens mortalium,
Paterna rura bubus exercet ſuis,
Solutus omni foenore.

nullis vendita plauſibus] Sic Barthius, cum eſſet in MS. *vendibilis*. Corrumpi ſe non ſinit a populi aſſentationibus. Euclio Plautinus: *nemini credo, qui large blandu'ſt diues pauperi*.

contemtrix queruli magno animo fori] In MS. *magnanima*. Si te iſthuc *magnanima* metri cauſſa offendit, lege *magno animo*. At Boëthius tamen etiam tribrachyn recepit, de Conſolatione philoſophica l. IIII. metro III. v. 14.

Flere dum parat, vlulat.

Sed hoc perquam inſolens.

furtiuis] clandeſtinis procerum cruciatibus, quippe qui cum ſuis cupiditatibus, et cum aliorum inuidia, criminationibus, occultis inſidiis, mille incommodis aliis conflictantur.

mater]

mater] quem paupertas inopi in domo natum ſibi vindicauit, proprium tota vita, quem inſtituit et formauit ſibi, μόνη ἀγαθῶν ἁπάντων ὅσα αἴτια, vt Comicus ait.

regina] vt Comicus in Pluto δέσποινα. Quem paupertas veluti mater et ſimul regina ſuo ſub imperio tenet. Regina et domina, amantium voces.

non illum tumidis faſcibus] Barthius e MS. *illum* ** *faſcibus*. ſublimem magiſtratibus et muneribus rei publicae.

nobilitas] *nobilitas curarum*, nobiles curae, magiſtratuum curae. Et *facilem fluctibus*, expoſitum fluctibus, periculis. Eſt enim *facilis* Maroni, tractabilis, mobilis.

ſuis orbum ſideribus] Ductum a nauigantibus, qui noctu cynoſuram ſuam reſpiciebant. Sidera paupertatis dicit ſapientiam, temperantiam, modeſtiam, humanarum rerum contemtum, quibus qui orbatus ſit, in eum quid ſibi fortuna non permittit?

ſplendida nox] Honores coniuncti cum obſcuris periculis. *Decor improbe caecus.* iidem honores in quibus inſidiae tectae non ſentiuntur. Seneca in Octauia v. 878.

bene paupertas
Humili tecto contenta latet;
Quatiunt altas ſaepe procellae
Aut euertit fortuna domos.

Hanc cantilenam Seneca perpetuo nobis inſuſurrat.

poſtquam] Eum dicit, qui relictis et magiſtratibus et honoribus otio ſe tradit, ſed minime liberali.

in

in ſuo reperit] *reperit* ſine dubio, in MS *in ſuo repetit*: at ſi cui choreus non placet, legat *ſicco*, quod etiam ſenſus poſtulat.

tumidis littore dentibus] Barthius e MS. *tumidis dentibus*. Etiam Virgilius *dentes* atque *morſus* ancorae attribuit.

ni te] niſi te ſancta quies, philoſophiae ſtudium ab deſidia leuet.

noctes et vigilans] In MS:

*Nos * vigilans ſomnis furor*
Tortis liberat anguibus.

Si, inquit, vigilans furor noctes et ſomnia non librat tortis anguibus, ſi facinorum conſcientia noctes et ſomnia non ſuis exagitat terroribus, tamen minor aliqua cura inerti ſemper moleſta erit. *Preſſo pede* vt Horatius l. I. Ode XXVII.

et cubito remanete preſſo.

circumſtant] *nebulae ingrati deſidii circumſtant*. Erat in MS. *circumſtans*.

DE HYPERBOREIS.

AVCTORE
T. S. Bayero.

Nulla res Hyperboreos per omnem Graeciam ita celebres fecit, quam quod ſacra ab iis in Delum mitterentur. Eas fuiſſe frugum primitias triticeis mergitibus inuolutas Herodotus tradidit. (1) Virgines Hyperboreae pertulere. Antiquiſſimarum nomina Delii ediderunt apud Herodotum, Αργιντε καὶ Ωπιν *Argin et Opin*, quae mox poſt Apollinem et Dianam natos in Delo fuerint, Ilithyiae ob felices matrum Hyperborearum partus diuinam rem ex voto facturae: vita vero defunctae, et prope Artemiſium (hoc eſt, ad vulturnum ſeu orientem hibernum inſulae, vbi ſimulacrum Dianae erat, quod Αρτεμίσιον ἰδίως dicebant Delii, vt Hyperides in oratione Deliaca teſtatur apud Harpocrationem) igitur prope Artemiſium ſepultae, quotannis ſolemni Deliorum carmine ludisque cultae ſunt. A Deliis hymnos eos accepere Iones et inſulani. Erat autem praeterea haec cultus ratio, vt, poſtquam ſacrificauerant, cinerem ſpargerent ex ara ſuper loculis Hyperborearum virginum. Hymnos primus Olen Lycius compoſuit. (2) Paullo poſt Argin et Opin in Delum venerunt ab Hyperboreis *Hyperoche* et *Laodice*. (3) In earum comitatu fuerunt quinque viri, qui deducerent. Verum etiam illae in Delo defunctae et in Artemiſio,

(1) l. IV. c. 35. (2) Herodotus l. c. (3) Herodotus l. IV. c. 33. 35.

miſio compoſitae ſnnt : (1) nec viri redierunt ad ſuos , qui quid virginibus factum ſit , nunciarent. In Hyperoches et Laodices memoriam pueri Delii et puellae tondebantur : et pueri quidem crines cum certa herba permiſtos conſecrabant , puellae vero Deliae ante nuptias ponebant crines, et fuſo circumuolutos ſuper Hyperborearum monumento dedicabant. Callimachi hymnus in Delum *Vpin* , *Hecaërgen* et *Loxo* nuncupat. *Vpis* eſt Herodoti *Opis* , et *Hecaërge* eſt *Argis* ; ſequitur *Loxo* Callimachi eſſe Herodoti *Laodicen* , haud difficili vocabulorum corruptela. Pauſaniae , cum haec attingit , neſcio quid accidit ; aut lapſus aliquis memoriae eruditiſſimum ſcriptorem , aut ingens librariorum incuria nos fefellit. Apponam totum locum ex Eliacis prioribus. Herculem ait, (2) ſtirpem oleaſtri ab Hyperboreis deportaſſe ad Graecos : εἶναι δὲ ἀνθρώπους, οἳ ὑπὲρ τὸν ἄνεμον οἰκοῦσι τὸν βορέαν, πρῶτος μὲν ἐν ὕμρῳ τῷ ἐς Αχαΐαν ἐποίησεν Ὠλὴν ὁ Λύκιος. ἀφικέσθαι τὴν Αχαΐαν ἐς Δῆλον ἐκ τῶν ὑπερβορέων τούτων. ἔπειτα ᾠδὴν Μελάνωπος Κυμαῖος ἐς Ὦπιν καὶ Εκαέργην ᾖσεν ὡς ἐκ τῶν ὑπερβορέων καὶ αὗται πρότερον ἐς τὴν Αχαΐαν ἀφίκοντο καὶ ἐς Δῆλον. Venit mihi aliquando in mentem, locum Pauſaniae ita emendandum eſſe : κομισθῆναι δ᾽ ἐκ τῆς ὑπερβορέων γῆς τὸν κότινόν φασιν ὑπὸ τοῦ Ηρακλέους ἐς Ελληνας. εἶναι δ᾽ ἀνθρώπους, οἳ ὑπὲρ τὸν ἄνεμον οἰκοῦσι τὸν βορέαν. πρῶτος μὲν ἐν ὕμνῳ τῷ ἐς Αργιν ἐποίησεν Ὠλὴν ὁ Λύκιος, ἀφικέσθαι τὴν Αργιν ἐς Δῆλον ἐκ τῶν ὑπερβορέων τούτων. ἔπειτα ᾠδὴν Μελάνωπος Κυμαῖος ἐς Ὦπιν καὶ Ε-

(1) Praeter Herodotum Clemens Alexandrinus in paraenetico p. 29. (2) p. 392.

καέργην ᾖσεν, ὡς ἐκ τῶν ὑπερβορέων καὶ αὗται πρότερον ἐς τὴν Αχαΐαν ἀφίκοντο καὶ ἐς Δῆλον. (1) *Ferunt ſtirpem oleaſtri ex Hyperboreis allatam fuiſſe ab* Hercule *ad Graecos: eſſe autem eos homines, qui vltra boream ventum colunt: primus Olen Lycius, in hymno, quem in Argin cecinit, auctor eſt, Argin in Delum veniſſe ab his Hyperboreis. Poſt eum Melanopus Cumaeus carmen fecit in Opin et Haecaërgen, quod ex his Hyperboreis etiam ipſae primum quidem in Achaiam, tum vero etiam in Delum venerint.* Apud eundem Pauſaniam Βοιὼ ἐπιχωρία γυνὴ *Boea mulier Phocica* auctor eſt, (2) cum alios Hyperboreos, tum Olenem Delphis oraculum Apollinis condidiſſe: Olenem vero primum et vaticinatum et ἑξάμετρον genus commentum:

Ενθα

(1) Liceat mihi, quod Deli et corrupti in Pauſania loci mentio in memoriam reuocat, apponere bona cum venia lectorum. Stephanus Byzantius: Ὀλυμπίειον τόπος ἐν Δήλῳ, ὃν κτίσαντες Ἀθηναῖοι χρήμασιν Ἀδριανοῦ Νέας Ἀθήνας Ἀδριανὰς ἐκάλεσαν, ὡς Φλέγων ἐν Ὀλυμπιάδων πεντεκαιδεκάτῳ. τὸ ἐθνικὸν Ὀλυμπιεὺς ἢ Ὀλύμπιος, ὡς Βυζάντιος. In epiſtola de Theophraſti Delii praeſidis monumento p. 59. ſic forte emendari Stephanum poſſe ſuſpicatus ſum: Ὀλυμπιεῖον τόπος ἐν Δήλῳ, ὃν ἔκτισαν Ἀθηναῖοι χρήμασιν Ἀδριανοῦ (οὗ τῇ εἰς ἑαυτοὺς εὐνοίᾳ χρώμενοι, μνηεῖδα τῆς πόλεως) Νέας Ἀθήνας Ἀδριανὰς ἐκάλεσαν. Tandem ſubiunxi: *verum ne ſic quidem Stephanum ſcripſiſſe credo, ac* ἐν Δήλῳ *potius irrepſiſſe, et expungendum eſſe.* Sic tum quaſi pro imperio dictabam, vt animus hariolabatur. Vatem me fuiſſe non peſſimum vidi, poſtquam Phlegontis Olympionica extare ſenſi in Scaligeriana Ἱστοριῶν συναγωγῇ e codice

Ἔνθα τοι εὔμνηστον χρηστήριον ἐκτελέσαντο
Παῖδες ὑπερβορέων Παγασὸς καὶ δῖος Ἀγυιεύς.
Ibi (inquit Boeo) *celebre oraculum tibi, Phoebe, condiderunt*
Filii Hyperboreorum Pagaſus et diuinus Agyieus.

Enumeratis deinde aliis Hyperboreis, ita deſinit carmen:
Ὠλήν θ', ὃς γένετο πρῶτος Φοίβοιο προφάτας,
Πρῶτος δ'ἀρχαίων ἐπέων τεκτήνατ' ἀοιδάν.
Et Olen, qui primus fuit Phoebi vates,
Primusque vetera carmina inſtituit ſcribere.

Ex his intelligo, antiquiſſimam fuiſſe Hyperboreorum in Apollinem Delium et Dianam religionem; ipſa autem nomina virginum Hyperborearum argumento ſunt, Graecas fuiſſe, quae a ſeptemtrione venerunt ſacra ferentes

Pariſienſi regio. Nam ad Olymp. 227. Ἀδριανὸς τότε Ὀλυμπιεῖον τὸ ἐν ταῖς Ἀθηναῖς, ἐν ᾧ καὶ αὐτὸς ἵδρυται, ἐξεποίησε, καὶ δράκοντα ἐς αὐτὸ Ἰνδίας κομισθέντα ἀνέθηκε. Nihil de Delo. Recte Stephanus *decimo quinto libro.* Holſtenius: *ſcribe* πεντεκαιδεκάτη, *vt referatur non ad librum, ſed ad Olympiadem.* Immo Phlegon in libros diuiſerat totum opus chronicum. Cetera quoque in Stephano turbauit, vt puto, Hermolaus CPlitanus, non modo hoc ἐν Δήλῳ. Nam τὸ ἐθνικὸν Ὀλυμπιεὺς κ. τ. λ. totum hoc, inquam, nihil ad Ὀλυμπιεῖον, ſed ad Ὀλύμπια, quod antecedit, vbi nunc in Stephano τὸ ἐθνικὸν omiſſum eſt. Miror Holſtenium iſtum errorem non obſeruaſſe, aut Thomam Pinedum: hos enim ad manus habeo. De Ryckio viderint alii. Veteres ſane errores in Stephano, quibus Peruſinus codex nullam medelam attulit. (2) p. 809.

tes Apollini. Scholiaſta Callimachi (1) et Seruius cenſent, ab earum vna Dianam nuncupatam ſuiſſe Οὖπιν. Crediderim potius, Dianam παρὰ τὴν ὄπιν dictam, ex quo Ionice Ουπις, Dorice Ωπις. Erat Diana etiam Nemeſis, quae in conſecratione templi Herodis Attici nomen ΡΑΜΝΟΥΣΙΑΣ ΟΥΠΙΣ gerit. Neque enim dubito, Argin ſeu Hecaergen a Dianae venationibus nomen habuiſſe. Hyperoche a curſu ſolis et lunae dicta, quae Apollinis et Dianae numina erant. Quis deinde Απόλλωνα τὸν Λόξιον ab obliquo curſu Solis, aut Αγυιέα a viarum vrbanarum cuſtodia ignorat? Inde Loxo et Agyeus ille. Hanc Apollinis religionem contemplanti mihi in mentem venit, Hyperboreos Graecos ſuiſſe eos, qui ſedem ſibi in Thracia tractuque omni ad Pontum Euxinum atque Adriatici maris ſeptemtrionem quaeſiuere inde a Troiano bello. Tales ſuiſſe reperio Hyllos in Liburnia, vt notum eſt e Dionyſio Periegete, de quibus Scymnus Chius ex Eratoſthene et Timaeo. Liburnis, inquit, finitimi ſunt Bulini.

> Εξῆς δὲ μεγάλη χερσόνησος Υλλικὴ,
> Πόλεις δ' ἐν αὐτῇ φασι πέντε καὶ δέκα
> Υλλους κατοικεῖν, ὄντας Ελληνας γένει.
> Τὸν Ηρακλέους γὰρ Υλλον οἰκιστὴν λαβεῖν,
> Εκβαρβαρωθῆναι δὲ τούτους τῷ χρόνῳ
> Τοῖς ἤθεσιν ἱστοροῦσι τοῖς τῶν πλησίον.

Poſt

(1) in Dianam v. 204.

Poſt haec magna eſt Cherſonneſus Hyllica,
Vrbes autem in ea dicunt quindecim
Hyllos incolere, qui ab ſtirpe ſint Graeci;
Nam Herculis filium Hyllum conditorem habuiſſe,
Barbaros autem factos eſſe paullatim
Narrant, e moribus vicinarum gentium.

Apollonii Rhodii Scholiaſta (1) Euſtathius ad Dionyſium atque Stephanus Byzantius ab Hyllo Herculis filio deductam fuiſſe coloniam produnt. Is eſt Herculis ex Deianira filius, vt Apollodorus ceterique eum γενεαλογȣ̃σι. Iam tota vita eius, vt ob res Peloponneſiacas ab eo geſtas nota eſt, ab hac deductae fama coloniae abhorrere videtur: nihilo minus Hylli ſunt antiquiſſimi iis in regionibus, quae Thracibus ab occaſu vicinae ſunt. Ab ortu et ad Pontum nihil dicam de Hylaea regione ad Boryſthenem, quoniam id nomen quidem Graecum, non autem quod ſciam, incolas Graecos habuit. Itaque Laurentius Begerus (2) fruſtra ſe torquet in numo inſcripto ΥΛΑΙΥ (ο ante Υ tam paruum reperitur in numis, vt oculos clariſſimi antiquarii in hoc nomine facile fugere potuerit) atque eum numum neque referre audet ad hos Hylaeos, neque iisdem adimere. Nihil ſane ad Hylaeos illos, immo neque ad iſtos in Liguria, (eſt enim eorum ἐθνικὸν ὑλλῆς) at verius ad Hylaeos in Locris. Stephanus: ἔςι ϗ πόλις Λοκρῶν τῶν Ὀζολῶν, ἧς τὸ ἐθνικὸν Υλαῖος. Id igitur Begero accidit in hoc numo, quod Goltio et Nonio in numo ΑΓΑΘΥΡΣΩΝ, qui non his Scythicis Agathyrſis, ſed Siculis tribuen-

(1) Ad Argonauticorum l. IV. v. 515. (2) l. I. p. 468. Theſ. Brand.

tribuendus fuit, quamquam Siculae vrbis ἐθνικὸν Ἀγαθυρσαῖος tantummodo exſtat. At Callipides noti ex Herodoto, qui illa aetate iam ita deſciuerant a Graecis moribus, vt Ἕλληνες Σκύθαι dicerentur. Iisdem temporibus Geloni antea Graeci Budinis Scythis permiſti, eorum etiam linguam, parum aberat, quin et mores omnes adſciuerant, vt alias oſtendi ex Herodoto. Geloni longe ante Megaricas Heracleotarum colonias, longe ante Mileſias ingreſſi terras Thracum et Getarum traiectoque Iſtro Budinis permiſti ſunt. Panticapaeum ipſo in ore Maeotidis ſitum Mileſiorum colonia fuit Plinio (1) et Strabone (2) teſtibus. Euſtathius ad Dionyſium Periegeten, (3) κτίσμα παιδὸς Αἰήτου. Si is fuit Aeetes Solis filius, qui Ephyraeae imperauit, inde profectus eſt in Colchidem, pater Medeae et tot fabularum, fuit filius eius haud ita multo iunior Hercule. Stephanus Byzantius: Παντικάπαιον ᾠκίσθη παρὰ Αἰήτου παιδὸς, λαβόντος τὸν τόπον παρὰ Ἀγαήθου τοῦ Σκυθῶν βασιλέως. Nugae: quis enim Colchicis fabulis tantum tribuet? tamen fama videtur vetus, Panticapaeum iam ante Mileſios colonos Graecam vrbem fuiſſe. Mileſii autem eodem tempore Olbiam et Iſtrum vrbem condiderunt Plinio et Strabone teſtibus. Olbiam, quae et Boryſthenes, (auctorem habemus Herodotum) perperam Pomponius Mela et Iornandes et Geographus Rauennas vrbes diuerſas fuiſſe tradunt. Teſte Herodoto ciues ſe malebant Olbitas vocari, Boryſthenitarum enim nomen Scythis vicinis ad Boryſthenem relinquebant. Tamen Herodotus ipſe Olbitas etiam Boryſthenitas appellauit, et

(1) l. IV. c. 12. (2) p. 358. (3) v. 311.

et Bion ille Olbita haud aliter quam Boryſthenita a Diogene Laertio, Athenaeo, Heſychio Mileſio, ceteris nuncupatur. Quare Graecis notius ſemper hoc nomen fuit, adeo vt alterius memoria etiam apud ipſos Olbitas intermortuum ſit, cum Dio Chryſoſtomus ipſa in vrbe haud aliter ciues diceret quam Boryſthenitas. Ab Olbia eſt *Olbiopolis*, Plinii et geographi Rauennatis *Olbiapolis* et *Oliuapolis*. (1) Situm vrbis Strabo (2) ducentis a Boryſthene ſtadiis definiuit. Herodotus, Stephanus, Dio Chryſoſtomus, Scymnus Chius, incertus auctor peripli Pontici intra Boryſthenem et Hypanim fluuios. Scilicet eo in loco, vbi fluuii exonerantur, magis tamen ad Hypanim. Quare in Herodoto ὑπὸ τῷ Ὑπάνι ſine dubio emendari debet ἐπὶ τῷ Ὑπάνι. Nam Dio Chryſoſtomus diſertiſſime omnium ſcribit, (3) vrbem a Boryſthene nomen accepiſſe ob magnitudinem et pulcritudinem fluminis, ſitam vero eſſe ad Hypanim ſupra Hippolai promontorium, quod roſtri naualis ad modum excurrat in ſtagnum, quod ducentorum amplitudine ſtadiorum a promontorio ad mare eſt, neque minorem eſſe eo loco fluminum latitudinem. Fuit autem Mileſiorum colonia teſte Strabone, Stephano, et quem ante alios dicere conueniebat, Herodoto. Hinc Miletopolis Plinio. Claudius Ptolemaeus ad occidentem hibernum Olbiae ponit μητρόπολιν, neſcio quam. Credo μιλητόπολιν in animo habuiſſe, et cenſuiſſe vrbem eſſe diuerſam ab Olbia. Video idem exiſtimaſſe Ioannem Harduinum. Euſebius Olbiam conditam ponit Olymp. XXXI. anno 2. qui eſt A. P. I. 4059. Retinuere Olbitae linguam et

(1) p. 267. 354. ed. Porch. (2) p. 151. (3) p. 144.

Hyperboreis ſacris habet, cum ſeu Homerus ſeu ille ὁ πρῶτος τὰ Ὁμήρȣ ῥαψῳδήσας Cynaethus, ſeu quisquis ille caecus ſenex e Chio quae adhuc exſtant, cecinit, iſthuc ipſum non praeteriiſſet, quod quotannis fieri in Delo cognoſcere poterat. At Thucydides auctor eſt, Delum maxime frequentatam fuiſſe, quoad Ionum fuit, non item poſtea. *Poſtea* cum dicit, tempora ea putat, cum a Polycrate Samio et Delus et Cyclades ceterae occupatae ſunt. Mox in Epigonis Homeri et Heſiodo et illo Olene Lycio memoria Hyperboreorum inſtaurata eſt. (1) Nempe quod tum altius ad boream merces Apollini transmittere per populos vicinos inciperent. Accipiebant autem haec ſacra Delii a Teneis, Tenei a Caryſtiis, Caryſtii a ceteris Euboeis, Euboei a Meliaco ſinu et inde a Dodonaeis, Dodonaei a populis ad Adriam: inde iam fama erat a Scythis ſacra perferri, Hyperboreis tradentibus. Ex quo itinere niſi Hyllos, certe Gelonos deprehendes Apollinis cultores.

Sed haec etiam ſacra deſierunt ante Herodoti aetatem: Graeci tamen tum maxime quaerebant ſuos illos Hyperboreos. Atque cum Ὑπερβόρειος ſignificet gentem, quae incolit τὰ ὑπάρκτια κλίματα, vt Plutarchi ſenſu vtar, ſicut et Strabo explicat, (2) tum vero illi vsque et vsque ſub ſeptemtrione Hyperbŏreos illos quaeſiuere, donec

Hyperboreae clauſtrum glaciale ſub vrſae

atque vltra anni ſolisque vias ſibi viſi ſunt perueniſſe. Alii Ὑπερβορέȣς tamquam ὑπερβαίνοντας ὅρον, *ſeculi humani terminum egredientes* dici, cenſuere apud Feſtum: et hoc iacto ab etymologia fundamento tam lubrico infinitas fabulas

(1) Herodotus l. IV. c. 32. (2) p. 586.

bulas de longaeuitate eorum conſuerunt, quales exſtabant apud Pindarum, Simonidem, Megaſthenem. Martianus Capella p. 141. *Poſt (Riphaeos) montes trans aquilonem Hyperborei, apud quos mundi axis continua motione torquetur, gens moribus, prolixitate vitae, deorum cultu, aëris clementia, ſemeſtri die, ſine etiam habitationis humanae praedicanda.* Alii ὑπὲρ βορέαν interpretati ſunt, tamquam boreas ventus illo populo ſit citerior. Pindarus in Olympionicis (1)

ἰδὲ κἀκείναν χθόνα
πνοιᾶς ὄπιθεν Βορέα
ψυχρου̃,
en illorum terram vltra flatum boreae frigidi.

Seu vt Seruius: *ſupra quos boreas flat.* Macrobius vera falſis miſcens: (2) *locorum*, inquit, *ſuper Scythiam omnium incolas vetuſtas Hyperboreos vocauit, quaſi originem boreae introrſum recedendo tranſiſſent, adeo aeterna paene premuntur pruina, vt non facile explicetur, quanta ſit illic frigidae nimietatis iniuria.* Iſthuc cum Herodotus iam ante ſe iactari videret, ab adſenſu ſe ſuſtinuit, idque ea cauſſa cenſuit abſurdum eſſe, quod Hypernotios quoque eſſe oporteat, ſi in hunc modum ſint Hyperborei. Ob hanc cauſſam Eratoſthenes (3) Herodoto σοφίσματος calumniam impingit, cum aeque probabile ſit, Hypernotios eſſe, vt ex eo, abſurdum alterum eſſe, minime intelligamus. Sed Olen ille Lycius et priſci Delii nihil aliud dicebant, quam vltra Thraciam, quae Graecis eſt ſub ſeptemtrione, homines Graecos genere fuiſſe, qui Apollinem ſumma religione colerent, et

(1) Ode III. v. 55. (2) p. 147. (3) apud Strabonem p. 57. 58.

inter Iſtrum Boryſthenem et Volgam obtinentibus. Mileſios deduxiſſe Strabo (1) confirmat. Idcirco Stephanus Byzantius: Ἀπολλωνίαν τῶν Ἰώνων vocat. Ioannes Harduinus in numis vrbium: *eſt altera quidem* Ἀπολλωνία τῶν Ἰώνων *in Thracia eodem auctore Stephano: Ioniam tamen dictam eſſe aliquam Thraciae regionem fidenter negamus.* Tamquam id dixerit Stephanus, aut tamquam iſthuc, quod dicit, non modo ad ſubleſtae fidei, ſed ad νοθείας quoque maculam geographo inurendam idoneum ſit. Quis non videt Stephanum ſaltem Ionum coloniam dicere. Eſt ſane numus ΑΠΟΛΛΩΝΙΕΩΝ ΕΝ ΙΩΝΙΑ, non tamen ex eo numo finxit Stephanus ΑΠΟΛΛΩΝΙΑΝ ΤΩΝ ΙΩΝΩΝ. *Ionum* dicitur, vt diuerſa eſſet ab *Apollonia*, eadem in Thracia *ad Strymonem*. Sunt denique aliae vrbes ad Pontum magno numero partem a Mileſiis conditae, partem ab Heracleotis.

Ab his Graecis iuxta mare Adriaticum, aut ab Gelonis, ceterisque ad Pontum legationes iſtas Hyperboreas veniſſe puto. Non eſt contemnendum, quod Scholiaſta Pindari ad Pythionicorum odam quartam annotauit: Βορέους ἐκάλουν οἱ Ἕλληνες τοὺς τὴν Θράκην οἰκοῦντας, διὰ τὰ τοῦ βορέου πνεύματα. *Boreos Graeci vocarunt Thraciae incolas ob ventum boreum.* Atque idcirco raptum Orithyae (illa Erechthei filia, Pandionis neptis fuit) ita interpretatur, quod non vtique aquilo ventus, ἀλλ' ἀνήρ τις τῶν ἐν Θράκῃ ἐνοίκων eam ſecum abduxerit, vt ille quoque περὶ ἀπίστων ſiue Heraclitus ſiue Heraclides. Itaque fortaſſis Hyperborei, *qui vltra Thracas*, vt Conſtantinus Porphyrogenneta (2) καὶ ἔθνη πολλά τε καὶ μέγιστα

μέχρι

(1) p. 370. (2) de adminiſtr. imperio p. 78. ed Band.

μέχει τȣ̃ Δανȣβίȣ ἐν τοῖς Ὑπερβορέιος τόποις κατῳκισμένα, *gentes multae et maximae ad Danubium vsque in Hyperboreis regionibus degentes.* Hippocrates libro de aëre aquis et locis, cum de Scythia: (1) κεῖται γὰρ ὑπ' ἀυταῖς ἄρκτοις ϗ τοῖς ὄρεσι τοῖς Ριπαιοισιν, ὅθεν ὁ βορέης πνέει, *ſita eſt ſub ipſis vrſis et montibus Riphaeis, vnde boreas flat.* Quare vetuſtiſſimi mortales in Graecia, cum vix vltra Ponti littora et vltra Danubii ripam venerant, inde iam boreae regnum ordiri credebant, et interiora colentes aut etiam ſub ipſo borea Graecos ſuos Hyperboreos dixerunt. Huc accedit, quod caeremonias Hyperborearum mulierum in Delo apud Paeonas et Thracias mulieres ſua quoque aetate obſeruari Herodotus animaduertit. (2) Neque enim ſine ſtipula triticea ſacra Dianae faciebant, ſiue id a Graecis acceperint mulieribus, ſeu Graecae a Threiſſis. Poſtquam virgines ab Delo ad Hyperboreos non ſunt reuerſae, non auſi ſunt ab eo tempore filias tanto diſcrimini committere, itaque ſacra ſua ad vicinas gentes miſere, vt adeo intelligi poſſit, ſuper Thracia hos Hyperboreos coluiſſe. Id oſtendam poſtea ex Herodoto: nam mihi adhuc aliud in mentem venit, quod hoc loco obſeruem. Vetuſtiſſimam eam caeremoniam Hyperboreorum fuiſſe, vt virgines filias mitterent in Delum, vel ex eo adparet, quod ſcriptores commemorant, tempora vicina partui Apollinis et Dianae fuiſſe. Poſtea plane deſiiſſe videtur illa religio apud Hyperboreos, cum ſe magis miſcuiſſent barbaris populis. Nam hymnus in Apollinem, quem Homero Thucydides attribuit, Cynaetho Chio autem Euſtathius in Homerum, et Scholiaſta Pindari in Nemeis, nihil de his

(1) c. 45. (2) l. IV. c. 33.

mores metropoleos. Immo de vultu quoque cuiusdam Calliſtrati Boryſthenitae Dio, πολὺ Ἰωνικὸν τοῦ εἴδους habuiſſe dixit. Amor maſculus iſthic vt apud Mileſios: colebant etiam Achillem in heroibus omnibus maxime, et Homerum in poëtis. Homerum enim Iones ſibi vindicabant, quod fama eſſet, teſte Euſebio, Homerum in migratione Ionica fuiſſe. Achillis autem ſepulcrum apud ſe eſſe Boryſthenitae gloriati ſunt, et alia eius herois monumenta in ſuo ſolo conſeruarunt. Deſcitum tamen eſt in colonia et a Graeci puritate ſermonis et ab habitu, quem a Melanchlaenis acceperunt. Mercatura cum alia, tum ſalis fuit. (1) Vrbs calamitates multas perpeſſa, ad extremum a Getis occupata et aequata ſolo eſt. Neque enim cum Dio eam cerneret, ſatis ampla pro veteri gloria fuit et male in primis aedificata. Turres tantum e vetuſtis monumentis antiquae amplitudinis teſtes in circumiacentis agri ruinis ſunt conſpectae. Vna res ſaluti fuit euerſo oppido, quod barbari cernerent, ſe mercaturis Graecis aegre carere, vt neceſſe eſſet Graecorum frequentiam hominum in agro permitti. Dixi ſupra, iisdem temporibus Iſtrum vrbem Plinii, et Rauennatis Iſtriopolin, Arriani Iſtriam conditam fuiſſe ad Pontum. Ioannes Harduinus numos Septimii Seueri et Alexandri Seueri adfert ΙΣΤΡΙΗΝΩΝ inſcriptos: Goltius vnum ΙΣΤΡΙΗΩΝ inſcriptum ſignatumque duobus capitibus, quorum vnum ad ſeptemtrionem, alterum ad meridiem verſum videtur. Laurentius Begerus eodem in numo legit ΙΣΤΡΙΗΑ. Nos in hoc numo argenteo, quem Buxbaumius CPli attulit, nunc vir ampliſſimus Ioſephus Nicolaus Delislius collega noſter cum ceteris

(1) Omnia ex Dione p. 437.

teris poſſidet, diſerte legimus .. ΣTPIA.. vt ſit IΣTPI-ANΩN. Stephanus Byzantius: Ιςϱος ἐν τῷ πόντῳ. Αῤῥιανὸς δ'Ιςϱιαν αὐτήν φησι. τὸ ἐθνικὸν Ιςϱιανὸς. Sic ſane Arrianus in periplo Ponti Euxini (1) et fragmentum peripli alterius (2) Ιςϱιανῶν λιμὴν. Begeri iudicio duo inuerſa capita ſitum vrbis ſignificant, vt teſtudo Peloponneſi, τϱίσκελον Siciliae: inuerſa autem ſunt, quod Iſtrus in confiniis Europae Aſiaeque, quas dirimat Iſter, ſita duas orbis terrarum regiones reſpiceret, vt Ianus bifrons ſua tempora. Metuo ne coniectura magis ſit ingenioſa, quam vera. An potius eo hoc pertinet, quod vrbs duas in diuerſas partes eſſet ſciſſa muro per medium oppidum ducto, vt Emporiis in Hiſpania fuiſſe T. Liuius (3) teſtatur? In auerſa phocaenam magis dixerim, quam cum Begero delphinum. Pertinet ſane ad piſcaturam diuitem et in flumine et in mari. Percuſſus enim numus videtur paullo poſt Alexandri Macedonis aetatem, cum Graecae coloniae opibus maxime florerent. Mileſii etiam ad Pontum condiderunt Apolloniam, circiter Olymp. XLII. Sic Scymnus Chius ἐν πεϱιηγήσει (4)

Μεθ'ἣν πόλις σύνοϱος ἡ Απολλωνία
Ταύτην δε πϱότεϱον ἔτεσι πεντήκοντά πυ
Κτίζυσι τῆς Κύϱυ βασιλείας τὴν πόλιν
Εις τὺς τόπυς ἐλθόντες ὁι Μιλήσιοι.

Finitima, inquit, *poſtea eſt Apollonia: eam annis admodum quinquaginta ante Cyrum regem Mileſii in haec loca profecti, vrbem condidere.* Quinquaginta annis ante Cyrum regem eſt circiter Olymp. XLII. Scythis iam regiones

Vv 2 inter

(1) p. 21. (2) p. 9. (3) l. XXXIV. 9. (4) v. 729.

et in Delum mitterent ſacra. Sine certo gentis nomine fruſtra quaeſiti ſunt ſeptemtrionales illi ſeu hyperborei. Scythae autem, cum quis de Hyperboreis quaereret, non aliter interpretabantur, quam gentes ad ſeptemtrionem ſitas, Melanchlaenos puta Androphagos: vltra enim ad ſeptemtrionem nullos ſe populos noſſe ferebant. Iſſedones autem Ponticis percunctantibus primum Arimaſpas et Aegipodas ad boream colere narrabant, vltra eos gentem quidem ignotam, attamen ſeptemtrionalem quemcunque populum. Hic protinus Graeci (in quibus eſt Herodotus) Hyperboreos poſuere vltra Verchoturios montes ſeu vltra Riphaeos, vt habet quoque Hellanicus Mileſius Herodoto ſuperior. (1) Ex Herodoto aut a magiſtro ſuo Hellanico hauſit Damaſtes Sigeenſis Herodoti aequalis, qui vnum hoc adiecit, hos montes ὑπερβορέυς καθήκειν ἐις τὴν ἐλέραν θάλασσαν, *Hyperboreos pertingere vsque ad extremum mare.* Itaque Sibiria eſt, quae commodum a Daurico vocabulo *Sibir* (nam ita et Perſis سيبير) nomen accepit: nam *Sibir* eſt *ſeptemtrio.* Hi vtique non ſunt illi Delio deuoti Hyperborei. Nulla tanta vanitas mihi in mentem veniat: attamen ſunt Hyperborei Herodoti. Pauſanias quidem (2) in ea ſententia fuit, a qua abhorremus. Nam magnifice ſe gerit et viam oſtendit, qua mergites triticei miſſi fuerint in Graeciam. Ad Arimaſpas et Iſſedonas et Scythas et Sinopen, et Graecis iam perſerentibus ad Praſienſes in Apollinis templum in agro Attico, hinc Delum. Iter ex Herodoto confictum fortaſſis non a Pauſania, ſed a poetis ante eum, qui nihil penſi habebant, quantum quidque verum eſſet, modo populo placerent, quas feciſſent fabulas. Hero-

(1) apud Clementem Alexandrinum p. 305. (2) p. 17.

Herodoti aetate fama erat, vt ſupra dixi, ſacra Hyperborea a mari Adriatico miſſa fuiſſe. Protarchus apud Stephanum, homo, vt puto, Bargyliates, τὰς Αλπεις Ρίπεια ὄρη προσηγορεῦσθαι, ϗ τὰς ὑπὸ τὰ Αλπαια ὄρη κατοικοῦντας πάντας Ὑπερβορέους ὀνομάζεσθαι. Pindarus vero quaſi veſtigia fugientium ab Hadriatrico ſinu ad interiorem ſeptemtrionem odoratus, ſedem Hyperboreorum ad Iſtri fontes conſtituit in Olympionicis; (1) cautus tamen prouidusque futuri, pone ſe veſtigia viae eius deterſit in Pythionicis: (2)

ναυσὶ δ' οὔτε πεζὸς ἰὼν.
εὕροις ἂν ἐς Ὑπερβορέων ἀγῶ-
να θαυμαςὸν ὁδόν.

non nauibus non pedeſtri itinere ad Hyperboreos penetrare datum eſt. Heraclides Ponticus vicinus temporibus captae a Gallis Romae, vt habet Plutarchus in Camillo, is, inquam, Heracleota, cuius vitam ſcripſit Diogenes Laertius, gentes, quae Romam ceperunt, ab Hyperboreis profectas tradit. Cimbros dicit, qui vtique a ſeptemtrione venerunt.

Cum tam longe et in incerta regione ſiti eſſent Hyperborei a veteri fama viſi ſunt mereri poëtis, vt fabularum feraces eſſent. Ne dicam quae de Apolline et Perſeo et Hercule inter eos commorantibus Pindarus cecinit, ne, quae de felicitate populi, de iuſtitia, de vita longa et cetera in modum Platonicae reipublicae aut lunaris a poetis finguntur, vt recte viderit Clemens Alexandrinus (3) τὰς τῶν Ὑπερβορέων ϗ Αριμασπίων πόλεις ϗ Ηλύσια πεδία δικαίων πολιτεύματα γεγονέναι, ne

(1) l. c. (2) Ode X. (3) p. 543.

ne dicam de templo Apollinis et luco, de pomis aureis et hortis Heſperidum. Lucianus ſaltem in Philopſeude inſpiciatur, quam ridiculas praeſtigias Hyperborei hominis impune commentus ſit. Nec ſibi, ne faceret, interdictum putauit, et exſtitere exempla, quae imitaretur.

Ex his colligi poteſt, quomodo nos gerere oporteat, cum viri magno et excellenti ingenio omnem operam in eo conſumunt, vt quaecumque de Hyperboreis in omni antiquitate commemorantur, ea ad Scandinauiam applicent. In illis ſuis tesquis regnant et auguria capiunt. Olaus Verelius in notis ad Heruarae fabulam contendit: Hyperboreos aut nusquam gentium aut in Scandinauia vel certe in extremis regionibus ad glacialem oceanum ſedes ſuas habuiſſe. Cum enim, inquit, ipſi Scandiani veteres ſeptemtrionalem hanc plagam ſemper appellauerint *Nordurhalſo heimſins* et *Nordurland* et ſe ipſos *Nordmenn*, iſtius nominis ſignificationem fama ad ſe delatam vocabulo Hyperboreorum expreſſere Graeci. Immo alia via inceſſit Olaus Rudbequius in Atlantica, et αὐτὸ τῦτο τὸ Υπερ-βόρειον non Graecum, ſed Scandinauicum ſonare edixit. Eſſe enim *Hyperboreos* quaſi *Yferborne*, *illuſtri loco natos.* Atque tum ille vero omnia vndique ex vetuſtis monumentis congerit et in hac arce ſua dedicat. Non inuideo Scandinauis Hyperboreorum nomen homo Prutenus, qui memini eos in patria mea ſub borea reſpici. At pati non poteſt Thormodus Torfaeus (1) Noruagis ſuis id eripi nomen, quod maiori iure vindicare poſſint, tamquam totius Scandinauiae Hyperborei. Cetera quae aduerſus Rudbequium diſputat, non minus ſunt docta, quam ingenioſa.

(1) Hiſt. Noru. T. I. p. 7. ſeq.

genioſa. Etiam hic vetus eſt error in Scandinauia, natus ab intemperanti eruditione, vt Hyperboreos ſe eſſe arbitrantes Abarim philoſophum ſuum fuiſſe praedicarint. In hiſtoria Hialmari regis Biarmlandiae atque Thulemarkiae, quam ſecundum Ioannem Peringskioldum Georgius Hickeſius edidit, (1) haec leguntur ex Peringskioldi interpretatione: *ex Graecia aduenerunt Abaris et Samolis* (*Abor ok Samolis*) *cum pluribus eximiis viris*, *qui mox grati acceptique ſunt*: *inclutus ea tempeſtate erat Hialmarus rex.* Abarin fabulam putat et reſpuit Herodotus. Alii eum Hyperboreis inſerunt, (ex quo auctor Hialmarianae hiſtoriae Scandinauis vindicauit) et Olympiad. III. inſcribunt. Ὀλυμπιάδων ἀναγραφὴ, quam Phlegonti Tralliano et vetuſtioribus Eratoſtheni atque Ariſtoteli tribuo Ολ. Γ΄ ά. Ἄβαρις ἐξ Ὑπερβορέων πρεσβευτὴς εἰς τὴν Ἑλλάδα ἦλθε. Sic etiam Hippoſtratus tradidit apud Harpocrationem; (2) alii apud eundem κατὰ τὴν εἰκοστὴν καὶ πρώτην Ὀλυμπιάδα. Pindarus κατὰ Κροῖσον τὸν Λυδῶν βασιλέα, itaque ſane ante Olymp. LVIII. Euſebius Hieronymo fere concinit, qui Olymp. LIV. 2. *Abaris de Scythia venit in Graeciam*, hoc eſt, ex eius rationibus annum vnum ante Croeſum regem. Quorum ſi quis verum cognouit in tam obſcura re, aequalis Zamolxis eſſe non potuit Abaris. Nam Zamolxin conſentiunt fere omnes Pythagorae famulum fuiſſe. (3) At Abaris aetas ſecundum hos auctores incidit aut annos ducentos ante Pythagoram natum, aut annos CXXIV. aut denique in

(1) Theſauri linguarum Septemtr. T. II. p. 128. (2) p. 5.
(3) Strabo p. 337.

annum ſextum Pythagorae, ſecundum Henr. Doduelli rationes in exercitatione de aetate Pythagorae, cum nondum natus eſſet Zamolxis. Euſebius aliis auctoribus Olymp. LXXXII. 4. *Abaris Hyperboreanus hariolus agnoſcitur.* Hoc ſolum congruit Zamolxis aetati. Sed quis in tanta varietate aliquid veri ſtatuet, cum iam ſua aetate Herodotus Abarim exploſerit?

OBSER-

OBSERVATIONES ASTRONOMICAE IN SPECVLA ACADEM. IMPER. SCIENTIAR. AB ANNO MDCCXXXIX – MDCCXLV.

a

Ioſepho Nicolao Delilio cum ſociis inſtitutae.

St. n.	temp. ver.	Anno 1739.
Ianuarii 5	$7^h\ 7'\ 34''$	Tertius ſatelles euaneſcens, intrauit in vmbram admodum exiguus; nebula autem in ipſo momento introitus ſuperueniens, illum aeque ac reliquos ſatellites oculis ſubduxit; hinc dubium oritur, annon immerſio totalis dimidia minuti primi parte tardius acciderit. Obſeruatio tubo reflectente 5. pedum inſtituta.
5	9 10 55	Ioue e nebula emergente tertius ſatelles eodem tubo ex vmbra emerſus conſpiciebatur. Ceterum nondum tanto lumine, quo fulgere alias ſolet, gaudebat; hinc emerſionem primam ſaltim ante minutum primum accidiſſe coniicio.
22	6 3 15	Emerſio 1. Coelo admodum ſereno obſeruata eo em fere momento tubo 15. pedum Campaniano, et tubo reflectente 5. pedum.

n. ſt.		temp. ver.			Anno 1739.
Febr.	10	5^h	$4'$	$3''$	Emerſio 3. Tubo reflectente, crepuſculum autem admodum ſenſibile, obſeruationem quarta minuti primi parte circiter dubiam reddit.
	17	7	17	10	Immerſio 3. Tubo reflectente } tempore ſereno
		9	8	27	Emerſio 3. Tubo reflectente } tempore ſereno
	18	6	38	11	Emerſio 2. Tubo reflectente, tempore ſereno.
	21	8	12	40	Emerſio 1. Tubo reflectente, tempore ſereno.
	25	9	20		Secundus ſatelles nondum apparuit, etſi per tubum reflectentem emerſio iam ante 22. minuta, ſecundum calculum obſeruanda fuiſſet. Ceterum aëris conſtitutio diutius obſeruationibus inuigilare non permiſit.
Iulii	30	13	18	29	Immerſio 1. Tubo reflectente, quae forte nonnulla minuta ſecunda ſerius accidit, prouti e circumſtantiis temporis conieci.
Auguſt.	25	12	58	30	Immerſio 2. Tubo 15. pedum Campaniano.
			58	35	Dubitatum fuit annon idem ſatelles adhuc eodem tubo appareat.
			59	15	Eadem Immerſio tubo reflectente, obſeruata fuit.
	31	9	57	36	Immerſio 1. Tubo 15. pedum Campaniano.
Septemb.	1	15	36	10	Immerſio 2. Tubo reflectente coelo ſereno et tranquillo.

Im-

n. ſt.	temp. ver.	Anno 1739.
Septemb. 7	11^h 54′ 18″	Immerſio 1. Tubo 15. pedum Campaniano.
	54 37	Eadem tubo reflectente coelo ſereno.
23	10 16 5	Immerſio 1. Tubo 15. pedum Campaniano.
	16 25	Eadem tubo reflectente coelo claro et ſereno.
30	12 11 27	Immerſio 1. Tubo reflectente. Nebula in inſtanti ſuperueniens ſatellitem oculis eripuit, qui iam ſatis diminutus erat, ex quo colligo, immerſionem totalem aliquot minutis ſecundis ſerius accidiſſe.
Octobr. 14	16 3 54	Immerſio 1. Tubo reflectente coelo ſudo.
16	10 32 48	Immerſio 1. Tubo 15. pedum Campaniano.
	33 0	Dubitatum fuit annon adhuc appareat.
	33 17	Eadem Immerſio tubo reflectente, coelo ſereno.
23	12 28 45	Immerſio 1. Tubo 15. pedum Campaniano.
	28 47	Eadem Tubo reflectente 5. pedum obſeruata.
Nouemb. 1	8 50 28	Immerſio 1. Tubo 15. pedum coelo nonnihil nebuloſo.
9	12 18 42	Immerſio 3. Tubo reflectente.
Decemb. 1	13 0 12	Emerſio 1. Eodem tubo.

Eadem

n. ſt.	temp. ver.	Anno 1739.
Decemb. 1.	13h 0′ 55″	Eadem immerſio tubo 15. pedum Campaniano obſeruata.
		Coelum equidem ſerenum erat, nimia autem ſatellitis et Iouis vicinia, obſeruationis certitudini quodammodo impedimento eſſe potuit.
3	7 28 2	Emerſio 1. Tubo reflectente.
	28 25	Eadem tubo 15. pedum Campaniano propinquitas Iouis et ſatellitis, obſeruationem tamen quodammodo incertam reddere potuit.
17	9 12 5	Emerſio 2. Tubo reflectente, coelo ſereno.
	11 10 13	Emerſio 1. Tubo reflectente, coelo ſereno.
19	5 38 27	Emerſio 1. Tubo reflectente, coelo ſereno.

ſt. n.	temp. ver.	Anno 1740.
Ianuar. 27	7h 53′ 13″	Immerſio 3. Tubo reflectente, coelo ſereno.
	9 55 0	Satelles iam emerſus magnitudine conſueta conſpiciebatur.
Februar. 3	5 51 47	Primus ſatelles ex vmbra emerſus apparere incipit tubo reflectente. Nebula autem forte emerſionem aliquanto tardius conſpiciendam praebuit.

Emerſio

ſt. n.	temp. ver.	Anno 1740.
Febr. 12	$6^h\ 5'\ 39''$	Emerſio 2. Tubo 15. pedum Campaniano, dubia, per aliquot minuta ſecunda, ob nebulam tenuem exortam.
Martii 4	8 2 20	Emerſio 1. aeſtimata. Satelles dimidia minuti primi parte ſerius ſe conſpiciendum praebuit; tubus nimirum reflectens, obſeruationi inſeruiens e loco mouendus erat.
		Finis obſeruationum, ante iter in Sibiriam ſuſceptum, inſtitutarum.

Obſeruationes Satellitum Iouis Petropoli inſtitutae, poſtquam e Sibiria redux eſſem.

ſt. n.	temp. ver.	Anno 1741.
Ianuar. 25	$13^h\ 16'\ 6''$	Emerſio 2. Tubo reflectente, aliquot minutis ſecundis circiter incerta.
27	12 45 5	Emerſio 1. Tubo 15. pedum Campaniano.
- - -	. 45 18	Tubo reflectente 7. pedum, non melioris notae.
Februar. 8	4 57 13	Quartus ſatelles in vmbram intrans, adhuc debili apparet lumine tubo reflectente 5 et 7 pedum.
	58 0	Certe vtroque Tubo non amplius conſpicuus.
10	6 34 24	Emerſio 3. Tubo reflectente 5. pedum.

ſt. n.	temp. ver.	Anno 1741.
Februar. 10	6° 34′ 26″	Eadem Emerſio Tubo reflectente 7. pedum.
	16 37 49	Emerſio 1. Tubo reflectente 5. pedum admodum incerta, quoniam ſatellites non bene conſpiciendae erant, ob Iouis exiguam admodum altitudinem.
14	5 31 35	Emerſio 1. Tubo reflectente 7. pedum. Prima Emerſio quinque minutis ſecundis citius accidere potuit.
17	10 35 15	Emerſio 3. Tubis reflectentibus 5. et 7. pedum, ſi aliquot minuta ſecunda excipias, certa.
19	10 30 20	Emerſio 2. Tubo reflectente 5. et 7. pedum. Iupiter e nubibus emergebat, ſatelles autem admodum debilis erat, ita, vt obſeruatio non ſatis certa ſit cenſenda.
Mart. 25	6 48 50	Emerſio 3. Tubo reflectente 5. pedum, certa, ſi aliquot minuta ſecunda exceperis, ob claritatem diei et viciniam ſatellitis.
30	11 18 17	Immerſio totalis 4. ſatellitis, tubo reflectente 5. pedum, admodum difficilis obſeruatu, ob motum nimis lentum huius ſatellitis. Immerſio haec 10. minutis ſecundis citius tubo reflectente maiori 7. pedum obſeruata fuit, qui Iouem et ſatellites non aeque diſtinctos, ac alter exhibebat. Emer-

ſt. n.		temp. ver.	Anno 1741.
Mart.	30	$11^h 40' 10''$	Emerſio 1. Tubo 15. pedum Campaniano. Hic ſatelles aliquot minutis ſecundis ſaltim ſerius per tubos reflectentes 5. et 7. pedum apparuit.
		13 11 45	Emerſio 2. Tubo reflectente 5. pedum et tubo 15. pedum Campaniano. Vicinia huius et primi ſatellitis, emerſionem hanc quinque vel ſex minutis ſecundis ſerius conſpiciendam praebuerunt.
April.	8	8 6 50	Emerſio 1. Tubo reflectente quinque pedum.
		11 43 24	Immerſio totalis 3. ſat. tubo 15. pedum Campaniano.
		43 46	Tubo reflectente quinque pedum.
	15	10 3 29	Emerſio 1. Tubo reflectente 5. pedum.
	16	9 15 30	Emerſio 4. Tubo reflectente 7. pedum.
	24	10 30 14	Emerſio 2. Tubo reflectente 5. pedum.
		30 28	Eadem obſeruata tubo 15. pedum Campaniano.
Aug.	29	14 33 0	Immerſio 1. Tubo reflectente 5. pedum, dubia.
Sept.	21	14 50 46	Immerſio 1. Tubo 15. pedum Campaniano.
		50 50	Eadem tubo reflectente 5. pedum.
	28	16 46 27	Immerſio 1. Tubo 15. pedum Campaniano.
		46 46	Eadem obſeruata per tubum reflectentem 5. pedum.

ſt. n.	temp. ver.	Anno 1741.
Octobr. 4	$15^h 29' 18''$	Immerſio 3. Tubo 5. pedum reflectente, dubia.
Nov. 13	17 10 30	Immerſio 1. Tubo reflectente. Nubes rariores obſeruationi impedimento eſſe potuerunt.
20	19 3 50	Immerſio 1. Tubo 15. pedum Campaniano.
	4 3	Eadem obſeruata tubo 5. pedum.
29	15 23 0	Immerſio 1. Tubo 15. pedum Campaniano et reflectente: dubia, ob nubem ipſo momento immerſionis ſuperuenientem.
Decemb. 8	11 42 13	Immerſio 1. Tubo 15. pedum Campaniano.
	42 27	Eadem tubo reflectente 5. pedum.
15	10 42 22	Emerſio 3. tubo reflectente 5. pedum.
	42 35	Eadem emerſio obſeruata tubo 15. pedum Campaniano. Satelles Ioui nimis erat vicinus vt de tempore ſat certi eſſe haud poſſimus.
	13 32 4	Immerſio 1. Tubo 15. pedum Campaniano.
	32 10	Eadem tubo reflectente 5. pedum.
24	9 50 5	Immerſio 1. Tubo 15. pedum Campaniano.
	50 20	Eadem tubo reflectente.

Immerſio

ſt. n.		temp. ver.	Anno 1742.
Ianuar.	8	$17^h 42' 20''$	Immerſio 2. Tubo 15. pedum Campaniano.
		42 26	Eadem Tubo reflectente 5. pedum.
	19	9 29 42	Immerſio 2. Tubo 15. pedum Campaniano.
		29 57	Eadem tubo reflectente 5. pedum.
	26	12 0	Immerſio 2. Tubo reflectente 5. pedum, difficilis obſeruatu propter Iovem oppoſitioni cum ſole admodum propinquum.
Febr.	15	14 8 13	Emerſio 1. Tubo 15. pedum Campaniano.
	20	11 57 16	Emerſio 2. Tubo 15. pedum Campaniano.
	27	14 34 0	Emerſio 2. Tubo 15. pedum Campaniano.
	28	15 59 32	Emerſio 4. Tubo reflectente 5. pedum.
Mart.	10	14 25 30	Emerſio 1. Tubo reflectente 5. pedum.
	12	8 54 5	Emerſio 1. Tubo reflectente 5. pedum.
		54 21	Eadem emerſio. Tubo 15. pedum Campaniano.
	17	16 22 28	Emerſio 1. Tubo 15. pedum Campaniano.
	18	10 40 0	Immerſio 3. Tubo 15. pedum Campaniano.
		40 25	Eadem immerſio. Tubo reflectente 5. pedum.
		14 15 35	Emerſio 3. Tubo reflectente 5. pedum.
	24	11 49 22	Emerſio 2. Tubo reflectente 5. pedum.

ſt. n.		temp. ver.			Anno 1742.
Mart.	24	11^h	49	43	Eadem emerſio. Tubo 15. pedum Campaniano.
	25	14	41	0	Immerſio 3. Tubo 15. pedum Campaniano, ſi 10. l. 12. minuta ſecunda excipias, certa.
	26	12	48	0	Emerſio 1. Tubo reflectente 5. pedum.
			48	20	Eadem tubo 15. pedum Campaniano.
	28	7	17	45	Emerſio primi. Tubo reflectente 5. pedum, nimia claritas diei obſeruationi obeſſe potuit.
April.	4	9	14	45	Emerſio 1. Tubo 15 pedum Campaniano
	18	9	7	56	Emerſio 2. Tubo reflectente 5. pedum, hinc emerſio forte 15. vel 20. minuta ſecunda citius accidere potuit.
		13	7	56	Emerſio 1. Tubo reflectente 5. pedum.
	23	10	23	8	Emerſio 3. Tubo reflectente 5. pedum.
Maii	20	9	47	33	Emerſio 1. Tubo reflectente 5. pedum.
	23	10	25	35	Emerſio 4. Tubo reflectente 5. pedum.
Octobr.	30	18	9	52	Immerſio 2. Tubo reflectente 5. pedum.
Decembr.	1	13	42	27	Emerſio 3. Tubo reflectente 5. pedum.
	15	18	3	1	Immerſio 3. Tubo reflectente 5. pedum.

ſt. n.		temp. ver.			Anno 1743.
Ianuar.	26	14^h	37′	36″	Immerſio 1. Tubo reflectente 5. pedum.
	27	13	34	15	Immerſio 2. Tubo reflectente 5. pedum.
		17	33	56	Immerſio 3. Tubo reflectente 5 pedum.
Febr.	11	12	52	54	Immerſio 1. Tubo reflectente 5 pedum.
Mart.	11	7	46	30	Emerſio 2. Nouo tubo reflectente 5. pedum.

Ioue

ſt. n.		temp. ver.	Anno 1743.
Mart.	25	$13^h\ 2'\ 23''$	Ioue a nebula liberato ſecundus ſatelles ex vmbra emerſus conſpiciebatur, tubo nouo reflectente 5. pedum.
	29	15 41 43	Emerſio 1. Tubo nouo reflectente 5. pedum.
	31	10 10 3	Emerſio 1. Tubo nouo reflectente 5. pedum.
		10 4	Eadem emerſio tubo veteri reflectente 5. pedum obſeruata.
April.	6	11 0 46	Immerſio 4. Tubo nouo reflectente 5. pedum.
		0 57	Eadem immerſio tubo veteri reflectente 5 pedum.
		14 56 56	Emerſio 4. Tubo nouo reflectente 5. pedum.
	9	12 53 14	Ioue e nube emerſo 3. ſatelles iam ex vmbra exiuerat, nondum autem magnitudine conſueta gaudebat. Tubus ad obſeruationem adhibitus fuit reflectens 5. pedum vetus.
	12	7 32 22	Emerſio 2. Nouo tubo reflectente 5. pedum.
	16	8 32 51	Emerſio 1. Nouo tubo reflectente 5. pedum.
		13 34 23	Immerſio 3. Nouo tubo reflectente 5. pedum.
	23	8 56 55	Emerſio 4. Nouo tubo reflectente 5. pedum.
		10 29 4	Emerſio 1. Nouo tubo reflectente 5. pedum.

Eadem

ſt. n.		temp. ver.	Anno 1743.
April.	23	10^h 29′ 10″	Eadem obſeruata. Tubo veteri reflectente 5. pedum.
Maii	7	14 22 40	Emerſio 1. Tubo nouo reflectente 5. pedum. Iupiter admodum profundus erat.
	9	8 49 12	Emerſio 1. Tubo nouo reflectente. Crepuſculum magnum.
	22	9 35 30	Immerſio 3. dub. Tubo nouo reflectente 5 .pedum.
		12 48 43	Emerſio 3. Tubo maiori Gregoriano valde bono.
		48 49	Emerſio 3. Tubo nouo reflectente 5. pedum.
Iun.	12	11 3 54	Immerſio 4. Tubo nouo reflectente 5. pedum 1. Crepuſculum magnum.
Nov.	28	19 23 8	Immerſio 1. Tubo nouo reflectente 5. pedum.
Dec.	7	15 41 9	Immerſio 1. Tubo nouo reflectente 5. pedum.

ſt. n.		temp. ver.	Anno 1744.
Febr.	4	11^h 2′ 10″	Emerſio 3. Tubo nouo reflectente 5. pedum.
	7	13 50 17	Immerſio 1. Tubo nouo reflectente 5. pedum.
Mart.	17	12 22 19	Immerſio 1. Tubo nouo reflectente 5. pedum.
	18	8 12 7	Immerſio 3. Tubo nouo reflectente 5. pedum. Iupiter erat profundus.

Im-

ſt. n.		temp. ver.	Anno 1744.
Mart.	18	$9^h\ 3'\ 22''$	Immerſio 2. Tubo nouo reflectente 5. pedum.
April.	18	11 17 17	Emerſio 1. Tubo nouo reflectente 5. pedum.
	19	11 13 48	Emerſio 2. Tubo nouo reflectente 5. pedum.
		14 2	Eadem emerſio. Tubo Campaniano 15. pedum.
April.	25	13 13 58	Emerſio 1. Tubo nouo reflectente 5. pedum.
		14 9	Eadem obſeruata tubo Campaniano 15. pedum.
	26	13 50 41	Emerſio 2. Tubo nouo reflectente 5. pedum.
	30	10 44 10	Emerſio 3. Tubo nouo reflectente 5. pedum.
Maii.	11	11 33 50	Emerſio 1. Tubo nouo reflectente 5. pedum.
		34 0	Eadem emerſio. Tubo 15. pedum Campaniano.
	21	10 49 27	Emerſio 2. Tubo 15. pedum Campaniano.

ſt. n.		temp. ver.	Anno 1745.
Mart.	1	$15^h\ 58'\ 8''$	Immerſio 2. Tubo reflectente 5. pedum.
	4	12 50 5	Emerſio 3. Tubo reflectente. Coelo ſatis ſereno, Iupiter non bene terminatus, neque ſatis eleuatus ab Horizonte conſpiciebatur.

ſt. n.		temp. ver:	Anno 1745.
Mart.	4	$16^h 53' 29''$	Immerſio 1. Tubo reflectente 5. pedum.
	11	14 58 57	Immerſio 3. Tubo reflectente 5. pedum; dubia ob vapores, quibus coelum repletum erat.
Maii.	7	12 22 20	Emerſio 1. Tubo reflectente Gregoriano 5 pedum, difficilis ob nimiam Iouis et ſatellitis viciniam.
	14	14 19 50	Emerſio 1. Tubo reflectente 7. pedum. Haec obſeruatio non ſatis certa ad minutum primum vsque, propter nimium crepuſculum et Iouem admodum profundum.
	15	9 27 48	Emerſio 2. Tubo reflectente 5. pedum. Crepusculum nimium obſtitit exactitudini obſeruationis, cuius incertitudo ad plarima minuta ſecunda ſe extendit.
	29	10 51 50	Immerſio 3. aeſtimata, quoniam ante minutum primum nube tectus fuiſſet, cum iam admodum diminutus apparuiſſet per tubum reflectentem 5. pedum
		12 36 25	Emerſio 3. tubo reflectente 5. pedum.
Iun.	23	11 33 19	Emerſio 2. tubo reflectente 5. pedum. Incerta ad minutum primum vsque, ob nimium crepuſculum et nebulam craſſam, quae reliquos vix conſpiciendos praebebat ſatellites Accedebat quod Iupiter non admodum eleuatus eſſet.

OCCVL-

OCCVLTATIO PALILICII A LVNA

d. $\frac{21.\ Septembr.}{2.\ Octobr.}$ 1738.

PETROPOLI OBSERVATA
a
G. Heinſio.

Occultationes quarundam ſtellarum ex Hyadibus a luna, circa ipſum eius ortum videndi ſpes erat, quam vero denſiſſima ad horizontem nebula fruſtrata eſt. Luna non niſi longum tempus poſt ortum ſuum in conſpectum venit, et tunc quoque tam craſſis inuoluta vaporibus, vt Palilicium in vicinia eius extans, per tubos quoque maiores videri non poſſet. Palilicium tandem conſpicitur, luna 10. gradus ſupra horizontem eleuata. Tubo aſtronomico 15. ped. lunam deinceps diligenter contemplatus ſum, an duplicem ſtellam, a Bayero θ deſignatam in vicinia lunae cernere poſſem, $9^h. 12'$. tempore vero ſtellam 2 ad θ ad limbum lunae obſcurum iam emerſam vidi, altera 1 ad ϑ tunc temporis non apparuit. Notato priori momento et tubo iterum ad lunam directo, altera quoque ſtella 1 ad ϑ, $9^h. 13\frac{1}{4}'$. in conſpectum venit. An circa hoc momentum 1 ad θ reuera emerſerit, aſſerere non audeo; nebulae enim craſſiores ſubinde interuenientes obſeruationem hanc dubiam reddunt. Interim momentum poſterius, a vero emerſionis momento non admodum diſcrepare debet, cum ſtellae confinio lucis et vmbrae diſci lunaris valde vicinae exiſterent, ſic vt colligerem iſtas, praeſertim 1 ad θ, limbo lunae obſcurae admodum propinquas fuiſſe. Converſo nunc tum lunae, tum Palili-

cii adſpectu, per tubum quadrantis portatilis, radii 2. pedum, loca lunae ad Palilicium iuxta methodum infra commemorandam determinaui ſequentia.

Ordo obſerv	Momenta obſeruationum Temporis veri	Differentiae aſcenſ. rectae centri ☽. et Palilicii in temp. primi mobilis.	Differentiae declinationum centri ☽. et Palilicii in part. circuli maximi.	Altitudo limbi ☽. inferioris (apparenter ſuperioris in tubo aſtron.) neque parallaxi, neque refractione correcta.
1.	10^h. 0'. 40''	4'. $42''\frac{1}{2}$	27'. 0''.	15°. $33'\frac{1}{2}$
2	— 24. 24	3. $52\frac{3}{4}$	23. 53.	18. 28.
3	— 33. 0	3. 35.	22. 43.	19. $31\frac{1}{4}$
4	— 59. 13	2. $49\frac{1}{2}$	18. 53	— — —
5	11. 14. 42	2. 17.	17. 33	24. $36\frac{1}{2}$
6	— 25. 58	1. $58\frac{1}{2}$	15. 45	25. $57\frac{1}{2}$
7	— 31. 43	1. 46.	15. 24	26. $39\frac{1}{2}$
8	— 37. 43	1. $37\frac{1}{4}$	14. 11	— — —
9	— 45. 52	1. 22	13. 22	28. 18
10	12. 6. 36	0. $45\frac{1}{2}$	10. 52	— — —
11.	8. 21	Immerſio Palilicii ad limbum lunae lucidum, tum per tubum Newton. 5. ped. tum per tub. aſtron. 15. ped.		
12.	— 38. 32	Coniunctio viſa centri lunae et Palilicii. Diſtantia centrorum minima deducta eſt 7'. 44''. part. circuli maximi, qua centrum lunae auſtralius erat Palilicio.		

13.

13	13.	8.	43.	Emerſio Palilicii ad limbum lunae obſcurum per tubum quadrantis portatilis, radii 2. pedum.		
				′ ″		
14.	-	18.	51.	1. 18¾	2′. 51″	— — ′
15.	-	27.	43.	1. 32.	1. 54	38°. 57½
16.	-	35.	39.	1. 45½	1. 6	39. 39½
17.	-	45.	5.	2. 0	0. 3	40. 27
18.	-	54.	13.	2. 14¼	1. 13	41. 8½
19.	14.	14.	59.	2. 48¼	3. 29	42. 37½
20.	15.	50.	55.	5. 15½	13. 10	46. 0. 40″.

Vltima haec obſeruatio ipſum momentum culminationis centri lunae reſpicit, et altitudo notata eſt, altitudo meridiana limbi inferioris lunae.

Ex obſeruata per Cl. De L'Isle centri lunae culminatione d. 3. Octobr. deducitur interuallum temporis inter vtrumque lunae per meridianum tranſitum d. 2. et 3. Octobr. $24^h. 46'. 56\frac{1}{2}''$ temporis veri; huic autem interuallo ex obſeruationibus reſpondet mutatio declinationis lunae interea facta $1°. 53'. 50''$. prouti e ſuperficie terrae viſa eſt. Declinatio eſt borealis creſcens.

Cum in tranſitu lunae per meridianum d. 2. et 3. Octobr. linea cuſpidum diſci lunaris ſitum verticalem haberet, vtriusque limbi tum ſuperioris, tum inferioris altitudinem meridianam obſeruare licuit; vnde deducta eſt diameter lunae apparens in Culminatione eius d. 2. Octobr. $29'\ 54''$; d. 3. Octobr. $30'. 15''$; vtraque ad altitudinem lunae meridianam iſtis diebus referenda.

Loca centri lunae ad Palilicium iuxta eandem methodum determinata ſunt, quam in diſſert: de tranſitu lunae

per Hyades d. 2. Ianuar. 1738. ſt. n. expoſui. Scilicet tubum quadrantis portatilis radii 2. pedum, in cuius foco quatuor fila ad angulos ſemirectos ſe decuſſantia extabant, ita verſus lunam direxi, vt filum, quod horizontale vocare ſolet, ſitum horizontalem exactum nanciſceretur, et vt tum luna, tum Palilicium, immoto quadrante, commode tria fila traiicere poſſent. Notaui deinceps momenta temporis, quibus tum limbus lunae lucidus, tum Palilicium ad tria eiusmodi fila, quaecunque fuerint, appulerunt. Hac obſeruatione peracta altitudinem, quam perpendiculum in limbo quadrantis notabat, deſignaui. Hoc modo ex appulſibus limbi lunaris et Palilicii ad tria fila, iuxta methodum citatam cognoui differentias aſcenſionum rectarum et declinationum centri lunae et Palilicii, prout iſtae in obſeruatione ponuntur, nec non diametrum lunae apparentem, quam habito diuerſarum lunae altitudinum ſuper horizonte reſpectu, optime conuenientem deprehendi cum diametro quae in culminatione lunae per altitudines meridianas vtriusque limbi, ſuperioris et inferioris, eruta eſt. Tandem ex datis momento obſeruationis et tempore appulſus limbi inferioris lunae ad filum horizontale, nec non ex data altitudine, ad quam quadrans in obſeruatione repoſitus fuit, innotuit ad momentum obſeruationis altitudo limbi inferioris lunae ſuper horizonte, prout in obſeruatione adſcripta eſt.

Figura 1. declarat poſitiones centri lunae ad Palilicium eiusque diurnum, et numeri ibi adſcripti conſpirant cum numeris, quibus ordo obſeruationum ſupra indicatur. Figura autem accommodata eſt apparentiae tubi aſtronomici, vt reuera ſupra meridies, infra ſeptentrio, ad dextram

dextram ortus, ad ſiniſtram occaſus ſubintelligi debeant. Ab obſeruatione 1. vsque ad 16. centrum lunae a Palilicio declinauit auſtrum verſus; ab obſeruatione 17. vſque ad 20. verſus boream. Centrum lunae ab obſeruatione 1. vſque ad coniunctionem viſam cum Palilicio in Aſcenſione recta hoc occidentalius fuit, poſt coniunctionem vero orientalius. Ceterum circumſtantias omnes ſupra notaui, quibus ad cognitionem parallaxeos aſcenſionis rectae et altitudinis lunae ex data eius poſitione ad Palilicium in culminatione d. 2. Octobr. et data quauis alia obſeruatione loci lunae ad Palilicium peruenire licet. Notandum autem eſt, tres quatuorue priores obſeruationes loci lunae ad Palilicium propter lunae viciniam ad horizontem et vapores, obſeruationem ſubinde turbantes mihi paulisper dubias eſſe.

Phaenomena quaedam in Occultationibus ſtellarum a luna obuia, et a me quoque tum in praeſenti, tum in obſeruatione tranſitus lunae per Hyades d. 2. Ianuar. 1738. notata, ſilentio praeterire nequeo; quae vero antequam recenſeam, ſequentia praemittenda duco.

Quando Iouem per tubos maiores contemplamur, diſtincta quidem diſci eius datur repraeſentatio; interim tamen non omne lumen ad limbum diſci ſtatim ceſſat, ſed ſpatium adhuc extat circa diſcum Iouis luminoſum, cuius lumen inaequalis eſt intenſitatis, et recedendo a limbo Iouis continuo decreſcit, donec in notabili a Ioue diſtantia cum coeruleo coeli colore penitus confundatur. Phaenomeni huius ratio haec videtur. Referat charta fig. 2. retinam oculi, in qua obiecta depinguntur, quando iſta videmus. Sit *amb* imago diſci Iouis in retina. Lumen in

in hoc ſpatio *amb* retinae conciliat motum vibratorium, cui ſenſatio intenſitatis luminis reſpondet; et haec eo maior eſt, quo fortior eſt iſte motus. Hic retinae motus intra ſpatium *amb*, in quo repraeſentatio fit, contineri nequit, ſed ad partes retinae adiacentes propagatur, et recedendo a ſpatio repraeſentationis *amb* continuo decreſcit, donec euaneſcat. Deſcripti ſint circa diſcum Iouis *amb*, circuli *cd*, *ef*, *gh*, *ik* etc. diſco concentrici ad exigua interualla, hunc in finem, vt in iſtorum peripheriis diverſos gradus motus a ſpatio repraeſentationis *amb* propagati diſtinguere poſſimus. Hoc pacto motus, qui eſt in ſpatio *amb* propagabitur eiusdem fere intenſitatis per zonam inter peripherias *cd*, *ab* contentam; quae proinde zona aeque luminoſa apparebit, ac diſcus Iouis *amb*, hoc eſt, propter luminis intenſitatem diſcus Iouis maior apparet, ac reuera eſt; videtur ſcilicet ſub magnitudine circuli *cnd*, cum diſcus tantummodo magnitudinem *amb* habeat. In zona inter peripherias *ef*, *cd* poſita minor, datur gradus motus retinae, vnde et ſenſatio luminis, quae huic motui reſpondet, minor erit, hoc eſt circa diſcum Iouis ſub circulo *cnd* apparentem, videbimus lumen circumfuſum, minoris tamen intenſitatis, quam in diſco ipſo et ab hoc probe diſtinguendum. In ſequenti zona inter peripherias *gh*, *ef*, adhuc minor dabitur retinae motus lumen quoque minoris intenſitatis ibi animaduertetur; et ſic porro per gradus continuo minuetur motus retinae et minor quoque luminis ſenſatio erit, donec haec alicubi ceſſet.

Si circulus *amb* ſumatur pro diſco lunae, dicta etiam de luna valebunt; eius diſcus maior apparebit propter inten-

intenſitatem luminis, ac reuera eſt, et circa iſtum corona lucida dabitur, quae tamen propter fortius lunae lumen ad maius ſpatium ſe extendet, quam in Ioue. Sit in S. ſtella, quae ad lunam pro immota habitam iuxta directionem SF feratur. Ponamus in peripheria *i k* deſinere coronam lunae luminoſam. Igitur ſi ſtella eſt in S, imago eius depingitur in ſpatio retinae, in quo nullus datur motus a lumine lunae effectus, vnde ſtella ſolito lumine fulgebit, et certam quandam, licet valde paruam, coronam circa ſe formabit, vt ante de Ioue vidimus. Quando ſtella peruenit ad K, offendit ſpatium retinae, in quo motus aliquis a lumine lunae datur. Sentimus ergo non integrum motum, quem lumen ſtellae efficere poteſt, ſed tantum exceſſum eius ſuper motum quem iam retina in K habet. Stella ergo in K lumine decreſcere videtur, et eius corona lucida contrahitur. Quando ſtella ad *h* pertingit, quia motus retinae in *h* fortior eſt, quam in K; exceſſus motus, quem lumen ſtellae retinae imprimere valet, ſuper motum retinae in *h*, minor erit ac antea; vnde et ſtellae adhuc minor erit claritas, eiusque corona magis minuetur. Et ſic porro ſtella accedendo ad limbum lunae continuo lumine decreſcet. Si intenſitas luminis ſtellae ita comparata ſit, vt ſolitarie motum tantum in retina efficere valeat, qui aequalis ſit motui in *f* a lumine lunae producto; tunc quando ſtella peruenit ad *f*, diſparebit, cum exceſſus motus a ſtella producti ſuper motum retinae in K hic euaneſcat. Hinc ratio manifeſta eſt, cur ſtellae 4^{tae}, 5^{tae}, 6^{tae} etc. magnitudinis, dum ad limbum lunae lucidum accedunt, in notabili ab eo diſtantia iam diſpareant, antequam diſcum lunae ſubeunt. Econtrario

 quoque

quoque patet, cur eaedem ſtellae poſt emerſionem non niſi in notabili a limbo lunae lucido diſtantia, veluti in *e* appareant, quia in propiori diſtantia veluti in *c* motus retinae fortior eſt, quam iſte, quem lumen ſtellae retinae imprimere valet. Inde phaenomena, quae de emerſione duplicis ſtellae θ in tranſitu lunae per Hyades d. 2. Ianuar. 1738. notaui, facile intelliguntur.

Si lumen ſtellae S ita comparatum ſit, vt ſi ſolum agat, motum retinae conciliare valeat, qui maior ſit quovis motu in *k*, *h*, *f*, *d* etc. a lumine lunae producto; manifeſtum eſt, ſtellam tranſeundo *k*, *h*, *f*, *d* continua quidem decrementa ſuae lucis pati, diſparere tamen non poſſe antequam diſcum ipſum *amb* ſubeat. Stella igitur, quando peruenit ad *d*, tangere videbitur limbum lunae falſum *cnd*, in tranſitu vero per ſpatiolum *db* ſtella in diſco lunae perſiſtere videbitur, donec ſubeundo diſcum lunae penitus in *b*, diſpareat. Scilicet per hyp: fortior eſt motus a lumine ſtellae productus motu retinae in *bd* a lumine lunae effecto, vnde exceſſus iſtius ſuper hoc datur poſitiuus. In hoc ergo caſu lumen falſum, quod diſcum lunae producit in *cnd*, ex praeſentia ſtellae diſtinguere valemus a limbo lunae vero *amb*. Phaenomenum hoc obuium eſt in occultationibus fixarum primae magnitudis a luna, et in praeſenti quoque obſeruatione ſe conſpiciendum praebuit.

Palilicium in acceſſu ad lunam per tubum 15. pedum primo tangere vidi limbum lunae falſum *cnd* in *d*; deinceps vero Palilicium intra ſpatium *db* ſe recepit, et tranſeundo hoc ſpatium $1\frac{1}{2}$ ſecunda temporis inſumſit, antequam ad limbum verum *amb* in *b* diſpareret. Sic Palilicium in diſco lunae ad *b d* apparuit et diſculum

optime

optime terminatum exhibuit paulurum lucidiorem, quam ſpatium erat intra peripherias *cnb*, *amb*, contentum, hoc eſt lumen lunare ipſum. Diameter Palilicii apparens exacte repleuit ſpatium *b d* ſeu interuallum peripheriarum *cnb*, *amb*, et in hoc ſitu deinceps ſtella in inſtanti quaſi diſparuit. Simile phaenomenum ſeſe exhibuit in emerſione Palilicii d. 2. Ianuar. 1738.

Ex obſeruatione praeſenti tum augmentum diſci lunaris propter luminis intenſitatem, tum Diameter Palilicii apparens, facile determinari poſſunt. Sint *amb* diſcus lunae pro immoto habitus, *cnd* limbus eius propter luminis effectum auctus, *dc* ſemita, in qua ſtella lunam traiiciat, CD diſtantia centrorum minima, C*b* vel C*f* ſemidiameter diſci veri, C*d* ſemidiameter diſci aucti, adeoque *fd* ipſius augmentum. Ad tempus immerſionis Palilicii eſt C*b* = 14′. 54″, = 894″, C*d* = 7′. 44″, = 464″; et exinde D*b* = 12′. 44″ = 764″. Tempus ſemimorae occultationis ſeu tempus per D*b* fuit 30′. 13″. temporis horologii, quo nondum correcto in obſeruatione vſus ſum. Palilicium ſpatium *db* traiecit in $1\frac{1}{2}''$, vnde facta analogia 30′. 13″, 764″ = $1\frac{1}{2}''$; quaeſitum, habebuntur pro ſpatio *db* 38, ſcrupula tertia circuli maximi. Iam Triangula C*d*D, *dbf*, ſeu, propter *bd* admodum exiguam, triangula CD*b*, *dbf* inter ſe ſunt ſimilia; vnde C*b* : D*b* = *bd* ; *fd*; quare *fd* inuenitur 32‴, ſeu. $\frac{1}{2}''$ cuius ergo magnitudinis eſt augmentum ſemidiametri lunaris ex effectu luminis, vel etiam diameter Palilicii, ſiquidem vi obſeruationis diſculus Palilicii exacte repleuit ſpatium inter limbum lunae verum et falſum comprehenſum. Fig. 3.

Caſſini in Commentar. Acad. reg. Scient. Pariſ. 1717. p. 333. ed. Batav. ex comparatione Sirii cum diſco Iovis per tubum 34. ped. diametrum apparentem Sirii aeſtimauit 5,″ adeoque multo maiorem diametro Palilicii, quae in praecedentibus ½″ inuenta eſt. Etſi autem concedere poſſim, diſcum Sirii reuera maiorem eſſe Palilicio; ex circumſtantiis tamen obſeruationis Caſſinianae colligo, diametrum Sirii apparentem nimis magnam, non ex defectu obſeruationis, ſed propter luminis intenſitatem, aeſtimatam fuiſſe. Diſculus ſcilicet eiusmodi fixae ex eadem cauſa auctus videtur, ex qua diſci Iouis et lunae, vi praecedentium, nobis maiores apparent. Augmentum hoc in fixis ſenſibilius eſſe debet, quam in Ioue et luna. Imago iſtarum in retina oculi ſpatium occupat fere infinite paruum, quod vt ſenſibile nobis fiat, ſpeciem finitae magnitudinis, licet valde paruae, referre debet. Intenſitas luminis fixae, quod punctum retinae ferit, motum eius per ſenſibile ſpatium propagare valet. Hoc modo fixae multo maiores apparere debent, ac apparerent, ſi dictus luminis effectus ceſſaret. Idem *Caſſini* Commentar. Acad. Reg. Scient. 1720. p. 182, ed. Bat. eleganti obſeruatione hoc confirmat, vbi ex occultatione duplicis ſtellae γ in virgine a luna deducit, diametrum ſtellae tertiae magnitudinis, non obſtante lunae vicinia, 30. vicibus maiorem vera apparuiſſe propter luminis ſui intenſitatem. Exinde colligere licet, quod cum *Caſſini* in determinatione diametri Sirii, hunc ſolitarium, accedente nullo lumine alieno, per tubum contemplatus ſit, iſte nimis magnus ipſi apparere debuerit; vt adeo diameter Sirii multo minor 5″ cenſenda ſit. Econtrario in praeſenti determinatione

tione diametri apparentis Palilicii propius ad magnitudinem eius veram perueniſſe videor cum effectus intenſitatis luminis Palilicii in contactu diſci lunaris, propter lumen huius intenſum, admodum diminutus fuerit. Interim diametrum Palilicii obſeruata adhuc minorem eſſe poſſe non nego, imo ea, que hactenus expoſui, hoc ſuadent. Magis quoque conuenit haec obſeruatio cum aeſtimationibus diametrorum apparentium in fixis ab *Hugenio* et *Keillio* inſtitutis. Prior in Cosmetheor. p. 137. diametrum apparentem Sirii 4.‴ concludit ex hypotheſi, quod Sirius aequalis ſit Soli et a nobis 27664 vicibus plus diſtat, quam Sol a terra. Poſterior in Lectionibus aſtronomicis Lect. 4, dum *Ricciolum* refellit, diametrum Sirii 18.″ ſtatuentem, euincit, iſtam $\frac{3}{20}$ vnius ſecundi vix eſſe maiorem.

Caeterum haec de augmento magnitudinum apparentium in ſyderibus ex intenſitate luminis doctrina, ad plura alia phaenomena ſeſe extendit, qualia ſunt, auctior repraeſentatio phaſeos lunae corniculatae prae reliquo diſco eius obſcuro, diminutio diſci lunaris in Eclipſi Solis, diminutio diſcorum Veneris et Mercurii in tranſitu per Solem; et alia.

OBSERVATIO
TRANSITVS LVNAE AD PALILICIVM d. $\frac{4}{15}$ Martii 1739. PETROPOLI HABITA

a

G. Heinſio.

Quo maior vtilitas ex obſeruationibus occultationum ſtellarum a luna in Aſtronomiam et Geographiam redundat; eo auidius obſeruatores iſtam occaſionem arripere ſolent, qua et frequens et diuturna occultationum obſeruatio conceditur. Eiusmodi occaſionem praebent fixae, quibus ſequentes competunt conditiones 1) vt claritate ſint conſpicuae, ne tamen intenſum lunae obſeruationibus iſtarum officiat; 2) vt ſibi inuicem admodum ſint vicinae, quo diſcus lunae amplus plures earum exiguo temporis intervallo tegere poſſit; 3) vt habeant latitudinem ſatis notabilem ad 5. circiter gradus aſſurgentem; haec enim conditio efficit, vt luna ſtellas iſtas, niſi circa limites verſetur, oculis eripere non valeat. Hoc autem caſu, licet nodi orbitae lunaris velociter regrediantur, poſitio orbitae ad fixas circa limites ſitas diu commoda pro effectu occultationum conſeruatur, ſic vt per duos tresue annos frequentes dentur eiusmodi fixarum a luna Eclipſes. Conditiones iam memoratae optime conueniunt Hyadibus; vnde etiam factum eſt, vt cum annis praecedentibus limes orbitae lunaris auſtrinus ad iſtas haereret, frequentes illarum a luna occultationes contigerent, quarum aliquas in Obſeruatorio imperiali obſeruatas Academiae iam exhibui. Licet autem nunc lunae nodi eiusmodi poſitionem reſpectu Hyadum nacti ſint, vt luna iſtas amplius quidem tegere non

non poſſit, ſed ad diſtantiam non adeo magnam eas tranſeat; eiusmodi tamen tranſitus obſeruare aeque conuenit ac occultationes ipſas, cum eundem praeſtent vſum. Hanc etiam ob cauſam Tranſitus lunae ad Palilicium d. 15. Mart. 1739. ſt. n. obſeruationem praetermittere nolui, quam coelo fauente iisdem inſtrumentis et eadem methodo, prout in praecedentium occultationum deſcriptionibus expoſui, peractam ſequentem in modum exhibeo.

Ordo obſeruat.	Tempus verum.	
I.	$4^{h}. 35' 53''$.	Culminauit centrum lunae, cuius altitudo meridiana ope ſextantis muralis deprehenſa eſt $64°. 1'. 0''$. Haec altitudo neque refractione neque parallaxi liberata intelligi debet. Ex culminatione Palilicii paulo poſt obſeruata cognoſcitur differentia aſcenſionum rectarum centri lunae et Palilicii $4'. 56\frac{1}{2}''$ temp. primi mobilis; differentia autem declinationum centri lunae et Palilicii $1'. 35''$. circuli maximi, qua centrum lunae auſtralius fuit Palilicio.
		Poſt ſolis occaſum, cum diſtinctus et lunae et Palilicii concederetur adſpectus, per tubum quadrantis portatilis radii 2. pedum, loca lunae ad Palilicium per reticulum

culum iſtius tubi obſeruaui iuxta eam methodum, quam in diſſert. de transitu lunae per Hyades d. 2. Ianuar. 1738. ſt. n. expoſui, et hactenus in eiusmodi obſeruationibus ſemper ſecutus ſum. Hac methodo deprehenſa eſt diameter lunae 30′. 20″. circuli maximi, obſeruationibus, ex quibus determinata eſt, optime inter ſe conſentientibus. Haec lunae diameter referri debet ad momenta obſeruationum ſequentium, ex quibus et ipſa diameter et differentiae aſcenſionum rectarum ac declinationum centri lunae et Palilicii innotuerunt. Erat autem

		Differentia Aſcenſionum rectarum centri lunae et Palilicii in tempore primi mobilis, qua centrum lunae occidentalius fuit Palilicio.	Differentia Declinationum centri lunae et Palilicii in partibus circuli maximi, qua centrum lunae borealius fuit Palilicio.
2.	6^h 28′. 21″.	1′. $57\frac{3}{4}$″	9′. 34″.
3.	6. 44. 15.	1. $31\frac{2}{3}$	11. 2.
4.	6. 56. 59.	1. $11\frac{3}{4}$	11. 55.
5.	7. 9. 1.	0. $51\frac{2}{3}$	13. 13.
6.	7. 31. 40.		

Coniunctio viſa centri lunae et Palilicii ex comparatione obſeruationum praecedentium deducta.

Diſtan-

Diſtantia centrorum minima ex definita centri lunae ſemita colligitur 15′. 38″. qua centrum lunae borealius extitit Palilicio.

7. 7. 34. 2. Palilicium coniungitur cum cuſpide phaſeos lunae inferiori, ſeu in linea recta ponitur cum vtraque phaſeos cuſpide. Coniunctionem hanc obſeruaui per tubum aſtronomicum 15. pedum, cuius ope tam exacte obſeruatio ſucceſſit, vt de momento coniunctionis ad ſecundum temporis certus eſſem, vnde eiusmodi obſeruationem aeque aptam cenſeo ad differentias meridianorum determinandas, ac ſi ſtella a luna occultata fuiſſet. Per eundem tubum aeſtimaui diſtantiam Palilicii a proxima cuſpide lunae in coniunctione, comparando iſtam cum macula lunari, quae a *Ricciolo* St. Theophilus vocatur, eamque aequalem $1\frac{1}{4}$ diametri huius maculae deprehendi. Ex cognita maculae huius ad diametrum lunae ratione, diſtantiam iſtam determinaui in partibus circuli maximi, eamque exactiſſime conuenientem inueni cum eadem diſtantia ex poſitione

 ſemitae

ſemitae lunaris reſpectu lunae et
ſtellae definita, aequali ſcilicet
$31''$. circuli maximi.

Figura adiecta oſtendit poſitiones centri lunae ad Palilicium ſitu inuerſo, in quo per tubum aſtronomicum obſervatae ſunt; numeri autem adſcripti indicant loca centri lunae in ſemita viſa ad ea temporis momenta, quae in recenſione obſeruationum iisdem reſpectiue numeris inſigniuntur.

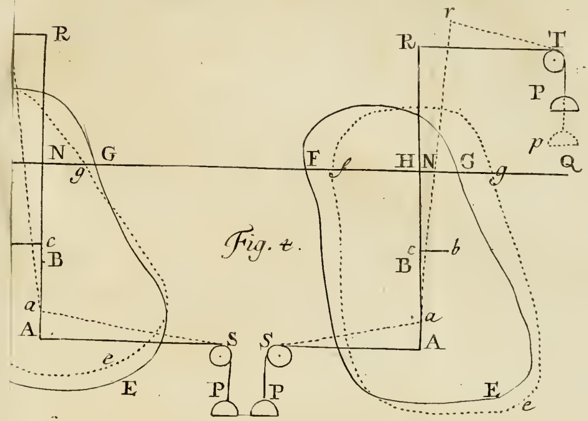


Fig. 4.

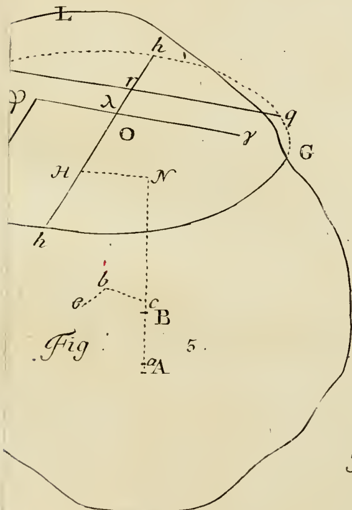


Fig. 5.

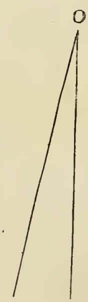
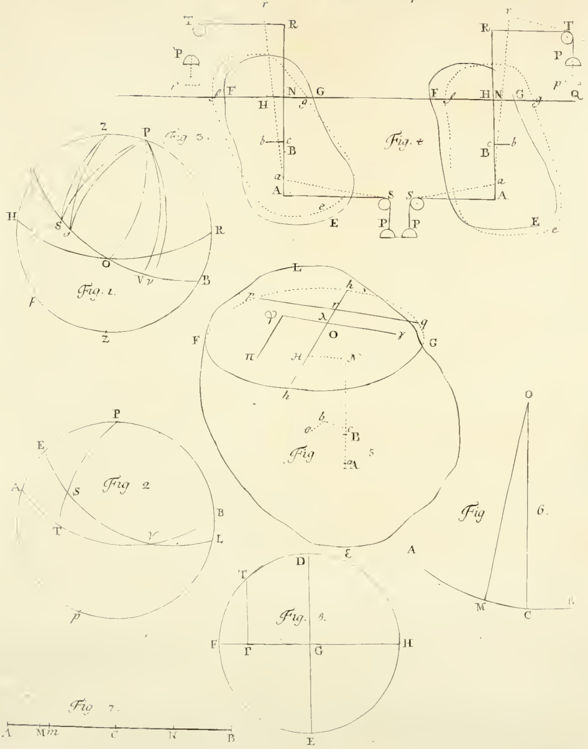
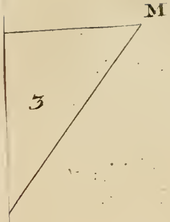


Fig. 6.


Fig. 1.
Fig. 2
Fig. 3.
Fig. 4
Fig. 5
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.



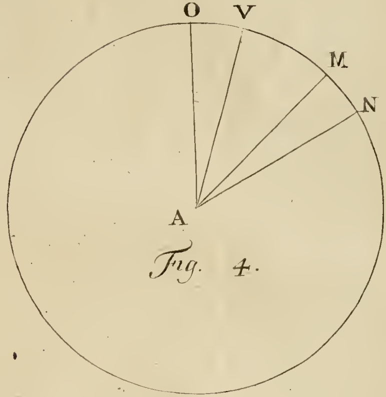


Fig. 4.

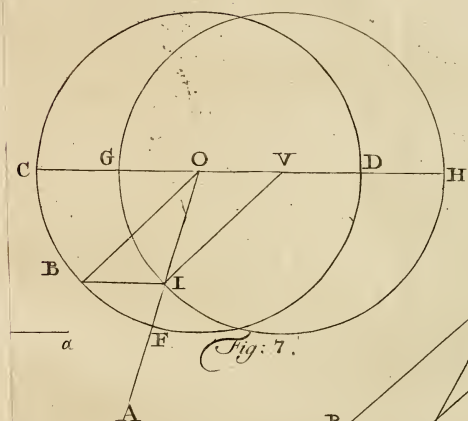


Fig: 7.

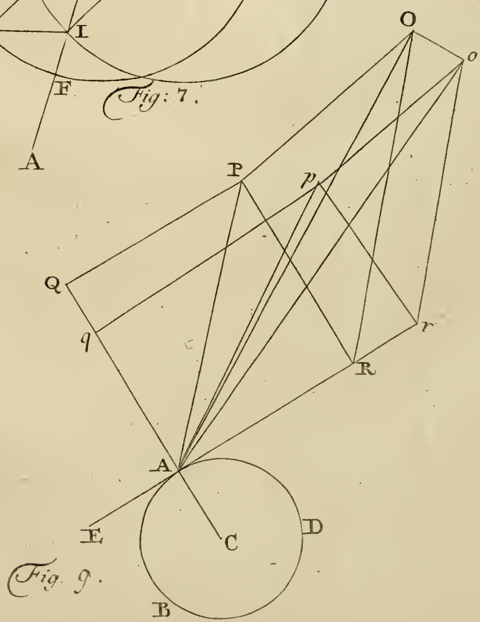
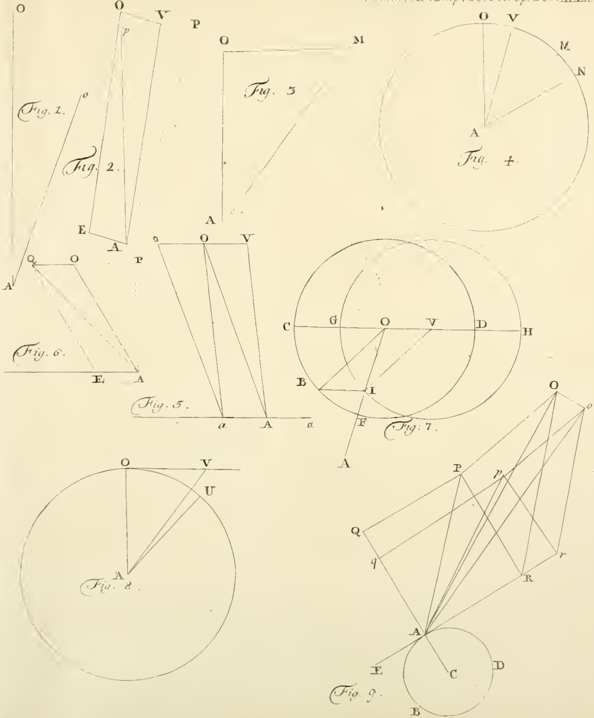


Fig. 9.


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.



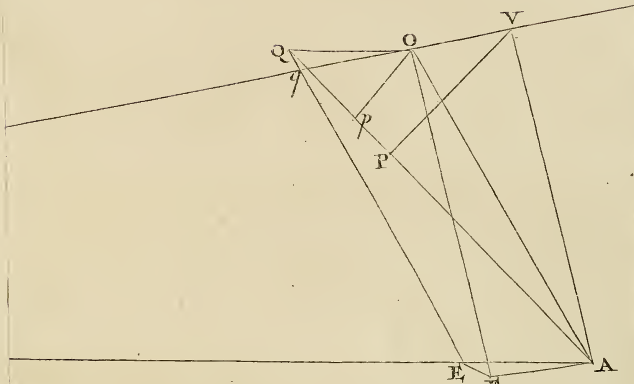
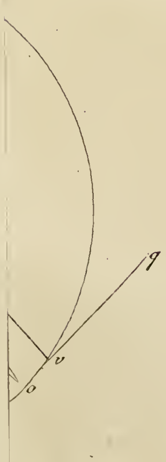


Fig: 2.



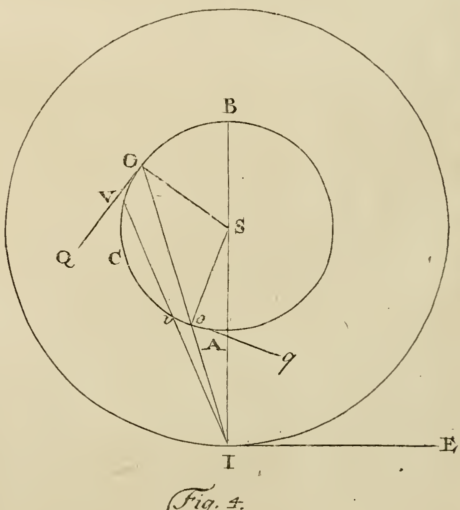


Fig. 4.

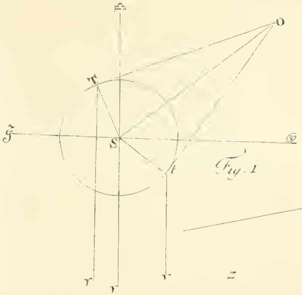


Fig. 1

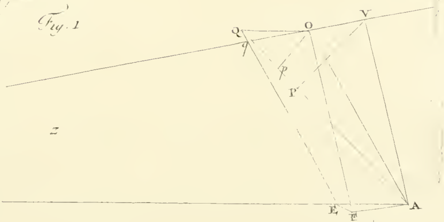


Fig. 2.

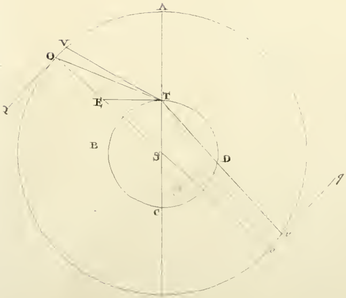


Fig. 3.

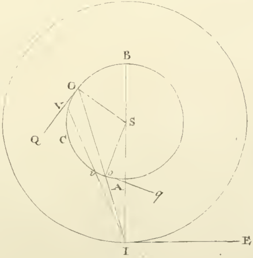
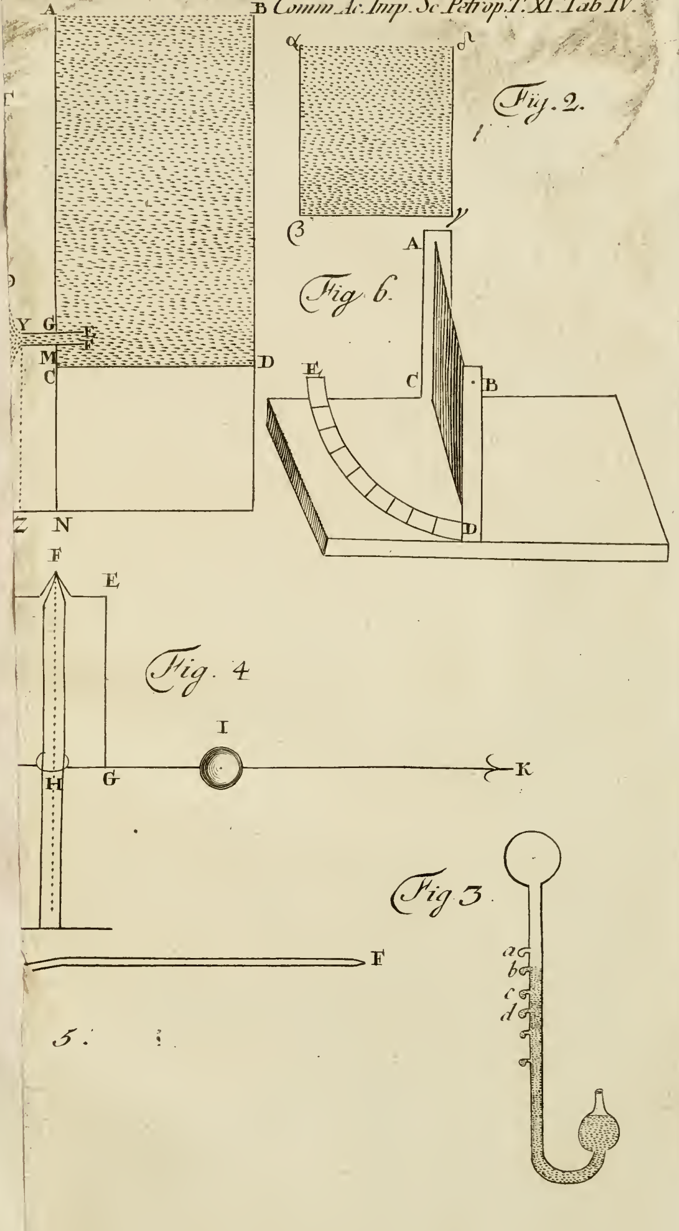
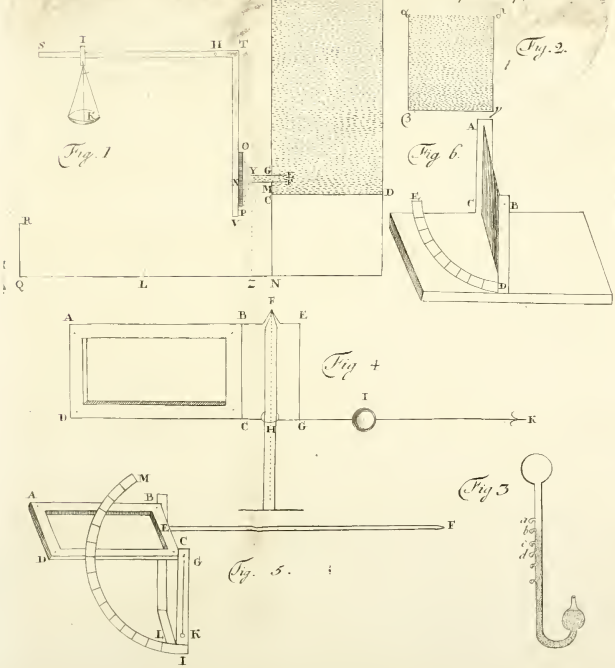


Fig. 4.


A
B
α
δ
β
γ
Fig. 2.
Fig. 6.
A
C
B
E
D
Y G
E
F
M
C
D
Z N
F
E
Fig. 4
I
H
G
K
F
Fig. 3.
a
b
c
d
5.


Fig. 1
Fig. 2.
Fig 6.
Fig 4
Fig 3
Fig. 5.

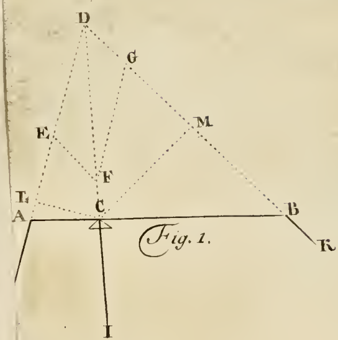


Fig. 1.

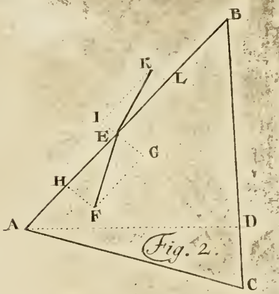


Fig. 2.

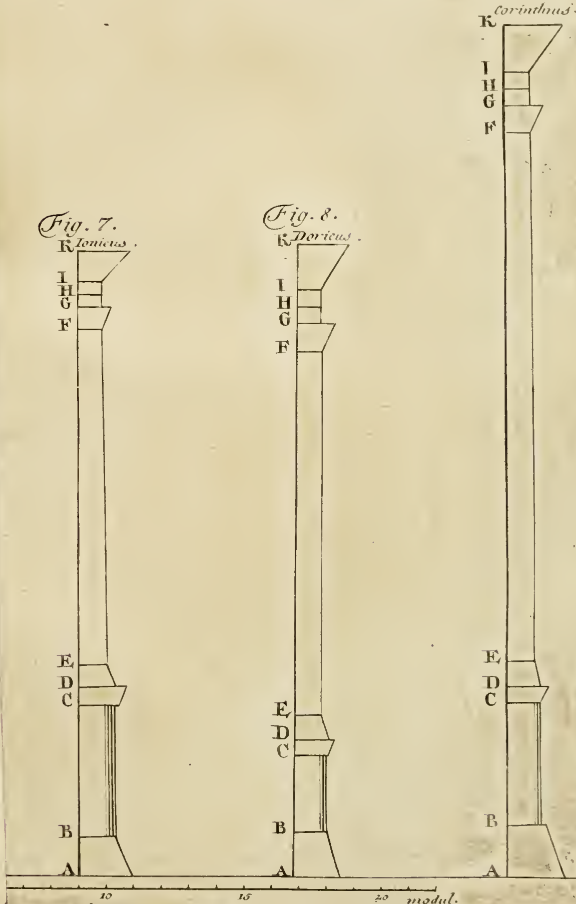
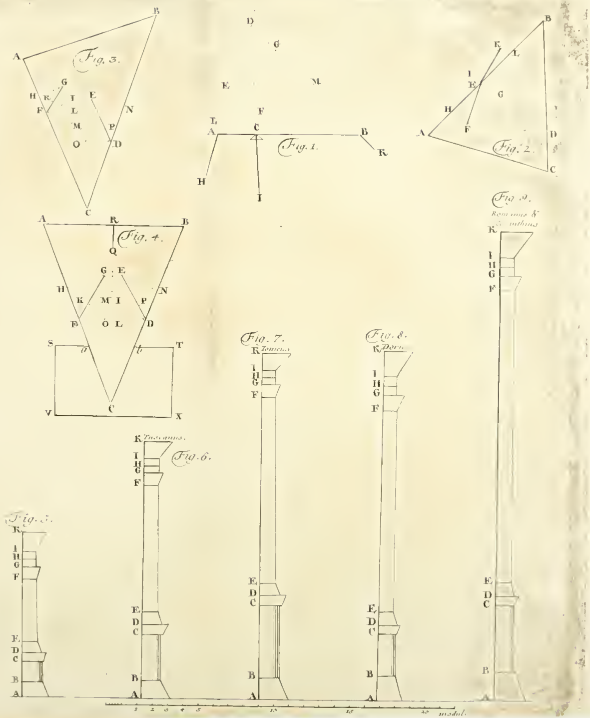


Fig. 7. Ionicus.

Fig. 8. Doricus.

Fig. 9. Romanus & Corinthius.


Fig. 3.
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 4.
Fig. 9.
Fig. 7.
Ionicus
Fig. 8.
Doric
Fig. 6.
Tuscanus.
Fig. 5.
modul.





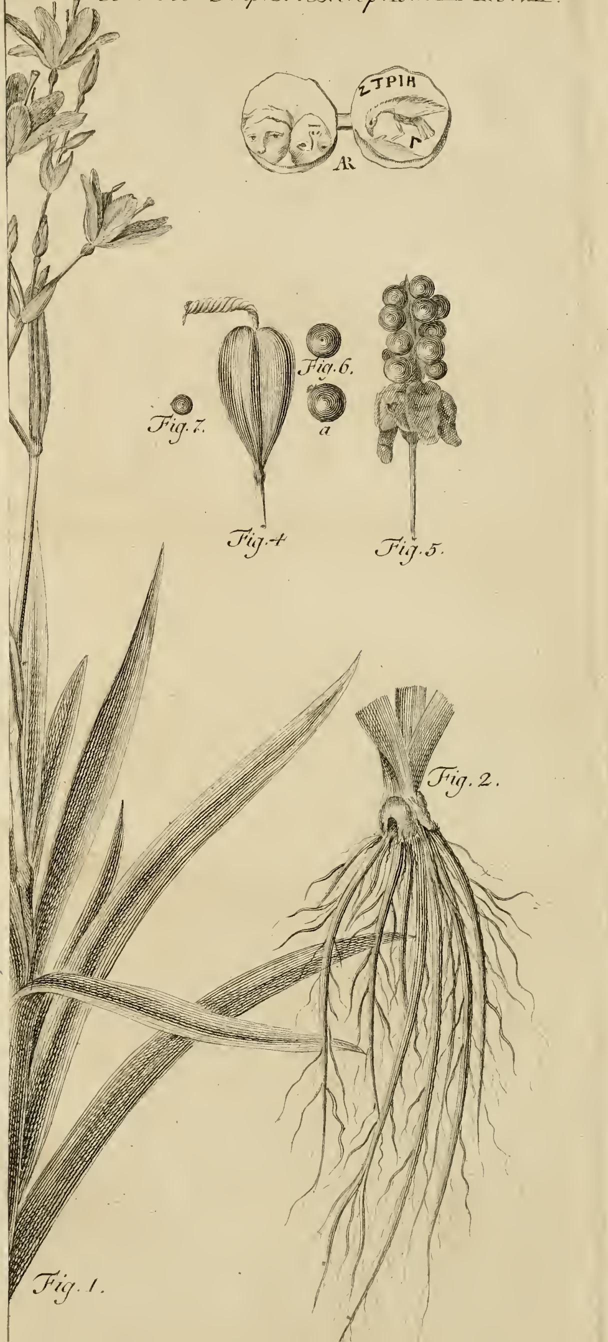

Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 4
Fig. 5.
Fig. 6.
a
Fig. 7.


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4
Fig. 5
Fig. 6
Fig. 7.

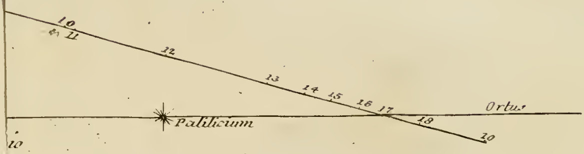
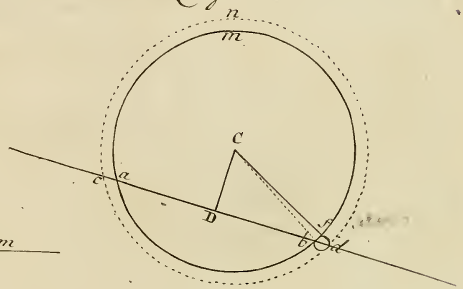


Fig. 3.



idies

Fig. 4.

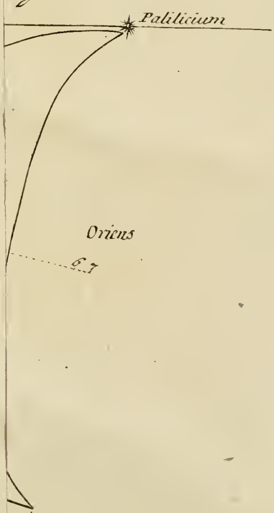


Fig. 1

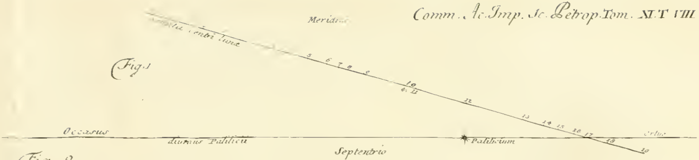


Fig. 2.



Fig. 3.

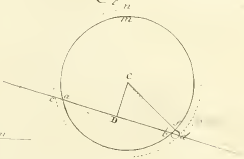
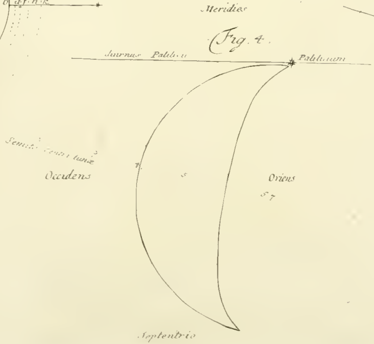


Fig. 4.



AMNH LIBRARY
100127238